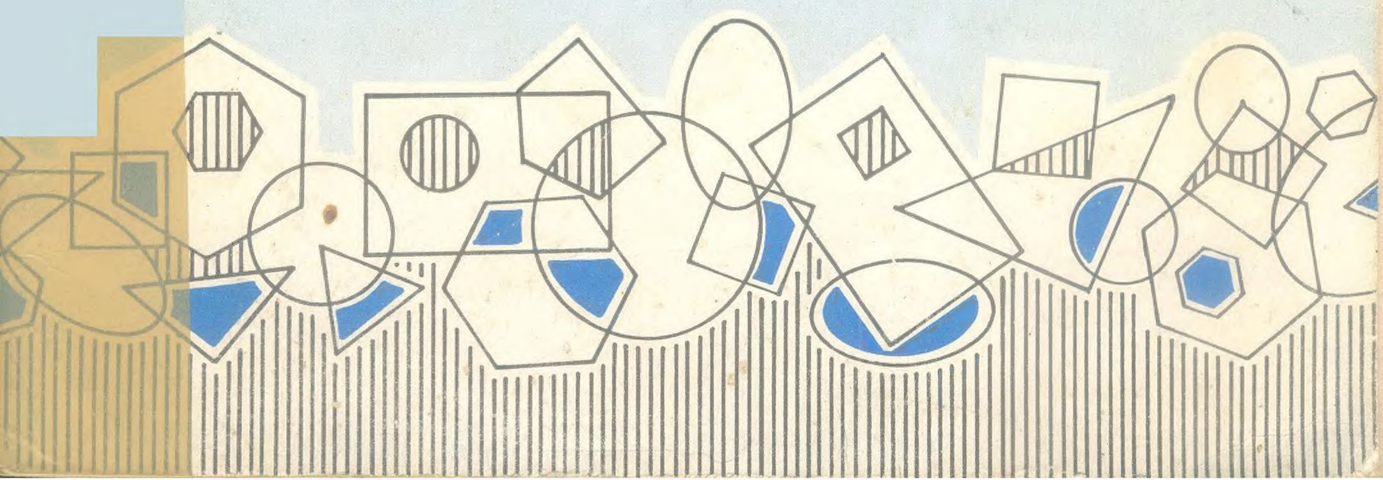
# गणितांच्या गुजगोष्टी

डॉ. र.गो. लागू
दी.त्र्यं. तारे

होमी भाभा विज्ञान शिक्षण केन्द्र
टाटा इन्स्टिट्यूट ऑफ फंडामेंटल रिसर्च
मुंबई



# गणिताच्या गुजगोष्टी

डॉ. र. गो. लागू
दी. त्र्यं. तारें

सजावट
आनंद घैसास

होमी भाभा विज्ञान शिक्षण केंद्र
टाटा इन्स्टिट्यूट ऑफ फंडमेंटल रिसर्च

मुंबई
ऑक्सफर्ड युनिव्हर्सिटी प्रेस
दिल्ली, कलकत्ता, मद्रास

*Oxford University Press*
Oxford New York Toronto
Delhi Bombay Calcutta Madras Karachi
Petaling Jaya Singapore Hong Kong Tokyo
Nairobi Dar es Salaam
Melbourne Auckland
*and associates in*
Berlin Ibadan

**Ganitachya Gujagoshti**
*(The Joy of Mathematics)*



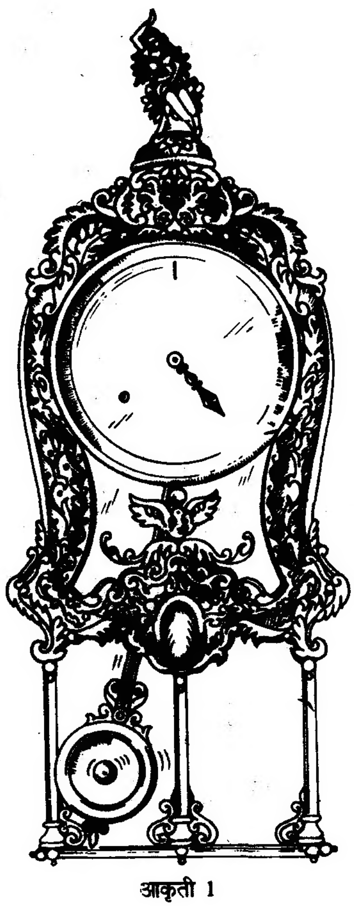
First published 1987
Reprinted 1989

Phototypeset by Ameet Offset, Bombay 400 019
Printed by Ram Kothari, Konam Printers,
Diana Talkies Lane, Tardeo, Bombay 400 034
Published by R. Dayal, Oxford University Press,
Oxford House, Apollo Bunder, Bombay 400 039

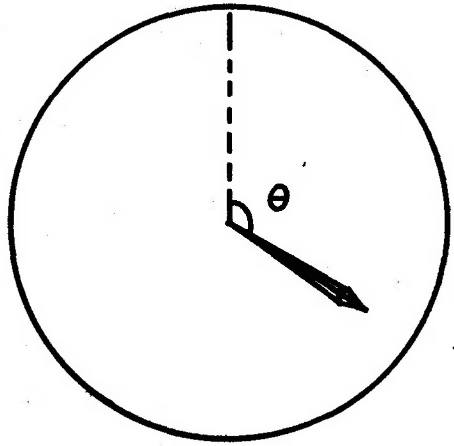
# अनुक्रमणिका

# 1. जुने घड्याळ

माझ्या लहानपणी आमच्या गावात एक म्हातारे गृहस्थ रहात असत. त्यांचे नाव होते हरकिसनलाल. आम्ही प्रेमाने त्यांना लालाजी म्हणत असू. शुभ्ररुपेरी दाढीमिशा वाढविलेले गोरेपान लालाजी आम्हा मुलांचे फार आवडते होते. आम्ही रोज त्यांच्या घरी जात असू. लालाजींनाही मुले फार आवडत. त्यांचे घर म्हणजे दुर्मिळ वस्तूंचा एक अजबखानाच होता. काय नव्हते त्या घरात ? निरनिराळ्या जातींचे गोंडस कुत्रे, पायात घोटाळणारी मांजरे, तऱ्हेतऱ्हेचे रंगीबेरंगी पक्षी, या सर्वांनी त्यांचे घर नेहमी गजबजलेले असे. त्यातच, लालाजींनी स्वतः बनविलेल्या सुंदर सुंदर मूर्ती त्यांच्यातील कलावंताची साक्ष देत सर्वत्र उभ्या असायच्या. रंगीत चित्रांची, गोष्टींची पुस्तके आणि पुरातन काळातील चित्रविचित्र वस्तू सर्वत्र पसरलेल्या असत. आम्हाला ती कधी अडगळ वाटली नाही. किंबहुना या सर्व गोष्टींमुळेच लालाजींचे घर आम्हाला फार आवडायचे. मुलांशी खेळणारे लालाजी मनाने फार प्रेमळ आणि हळवे होते.



आकृती 1




आकृती 2

लालाजींच्या अजबखान्यात एक जुने घड्याळ होते. भिंतीवर टांगलेले ते घड्याळ म्हणजे लालाजींचा एक जिव्हाळ्याचा विषय होता. आपल्या आजोबांनी इंग्लंडमध्ये ते कसे विकत घेतले, याची गोष्ट लालाजी अतिशय रंगवून सांगत. अर्थात, त्या जुन्यापुराण्या घड्याळाची तबकडी म्हणजे केवळ एक कोरी चकती होती. त्यावर ना रेघा ना आकडे. तशातच मिनिटकाटा गायब होता. फक्त एक छोटा, जाड, तासकाटा एकाकीपणे तबकडीवरून हळूहळू फिरत असायचा. आणि हो ! नाही म्हणायला 12 आकड्यापासची एक पुसट रेघ तेवढी तबकडीवर अजूनही शिल्लक होती. लालाजी नित्यनेमाने त्या घड्याळाला किल्ली देत आणि तासकाट्याच्या अंगात धुगधुगी येई. अर्थात, हा सर्व प्रेमापोटी केलेला एक यांत्रिक व निष्फळ भाग होता — घड्याळाचा तसा कोणताच उपयोग नव्हता. त्या घड्याळावरून वेळ सांगणे केवळ अशक्य होते. घड्याळ दुरुस्तीला टाकायलाही लालाजी नाखूष असायचे, कारण त्यात घड्याळ दुसऱ्यांच्या ताब्यात देण्याचा प्रश्न अडकलेला. एकूण काय, लालाजी आणि घड्याळ एकमेकांना सोडायला मुळीच तयार नव्हते.

एके दिवशी त्या घड्याळाकडे माझे लक्ष गेले. मी निरखून पाहू लागलो. सोनेरी नक्षीकाम केलेले ते सुंदर घड्याळ माझ्या कुतूहलाचा विषय बनले. 'या जीर्णशीर्ण झालेल्या घड्याळावरून 'किती वाजले' हे सांगता येऊ शकेल ?' माझ्या

मनात विचार आला. सुरुवातीला सगळेच अशक्य वाटले. एके दिवशी मात्र, ध्यानीमनी नसताना, अचानक मला उत्तर सुचले. उत्तर इतके सोपे होते, की क्षणभर मी गारदच झालो. मी लालाजींच्या हातात एक कोनमापक दिला व सांगितले, की या कोनमापकाने आपल्याला सहज वेळ समजेल. लालाजींना थोडा वेळ काहीच कळेना. मी पुढे सांगू लागलो. घड्याळावरील 12 जवळची पुसट रेघ व तासकाटा यांच्यातील कोन कोनमापकाने मोजायचा (आ. 2 पहा). हा कोन जर $\theta$ अंश आला तर ती वेळ म्हणजे 12 वाजून $2\theta$ इतकी मिनिटे!

उदाहरणार्थ, $\theta = 60°$ असेल तर 12 वाजून 120 मिनिटे झालेली असतील. म्हणजेच दोन वाजलेले असतील. किंवा $\theta = 105°$ असेल तर 12 वाजून 210 मिनिटे झालेली असतील. म्हणजेच साडेतीन वाजलेले असतील.

या पद्धतीमागचे तत्त्व पाहण्याआधी आपण प्रथम पुढील तक्ता पाहू.

| वेळ (घड्याळाप्रमाणे) | 12 वाजल्यानंतरची मिनिटे | 12 च्या रेघेशी तासकाट्याचा होणारा कोन ( $\theta$ अंश) |
|---|---|---|
| 3 | 180 | 90° |
| 6 | 360 | 180° |
| 9 | 540 | 270° |

या तक्त्यावरून आपणास असे दिसेल की, 12 वाजल्यानंतरची मिनिटे बरोबर $2\theta$ इतकी असतात. काय असावे याचे कारण ?

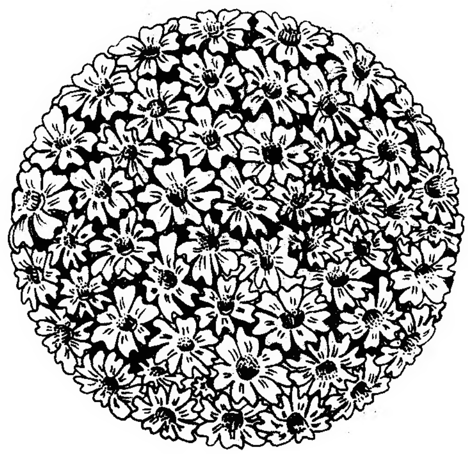
तासकाटा घड्याळाच्या तबकडीवर, एकाच वेगाने, गोलगोल फिरतो व 12 तासात एक वर्तुळ पुरे करतो, हे आपणास माहीत आहे. याचा अर्थ तो 12 तासात 360 अंशांतून फिरतो. म्हणजेच 1 तासात तो 30 अंश फिरतो, किंवा दर 2 मिनिटांत 1 अंशाने पुढे जातो. कोनाच्या (अंशामध्ये) दुप्पट मिनिटे तासकाट्याला तो कोन पार करायला लागतात, हे यावरून आपल्याला समजेल. ज्यावेळी 12 च्या खुणेशी तासकाट्याने विशिष्ट कोन केलेला असेल त्यावेळी त्या काट्याला तो कोन फिरायला 12 वाजल्यानंतर कोनाच्या दुप्पट मिनिटे लागलेली असणार. म्हणजेच 12 वाजून तेवढी मिनिटे, इतकी ती वेळ असणार.

माहीत असलेल्या साध्या साध्या गोष्टींचा उपयोग करून आम्ही ते घड्याळ वापरात आणले. 'मृतप्राय झालेल्यांना संजीवनी देऊन चालते कसे करावे, हे जर माहीत असेल तर काहीच वाया जात नाही', असे कुणी म्हटले आहे ते अगदी खरे आहे.

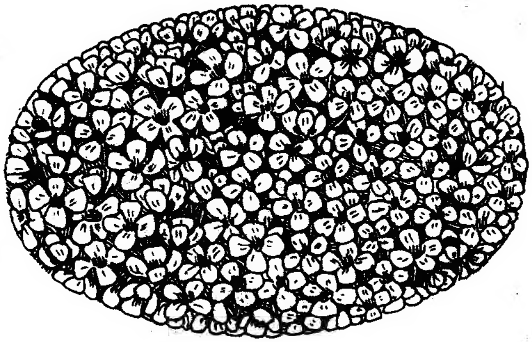
## 2. भूमिती शिकविणारी गाय

आजकाल मोठमोठ्या शहरांतून टोलेजंग इमारतींची नुसती गर्दी झाली आहे. अशाच एका शहराबाहेर, परंतु जवळच, एक विस्तीर्ण निसर्गरम्य परिसर होता. या परिसराच्या मध्यभागी एका मोठ्या कंपनीची एक देखणी इमारत दिमाखाने उभी होती. भोवतालची हिरवीगार हिरवळ, बगिचातील रंगीबेरंगी फुलांचे ताटवे, थुईथुई नाचणारी कारंजी, यांच्या वैभवात ती इमारत एखाद्या सम्राज्ञीसारखी दिसे.

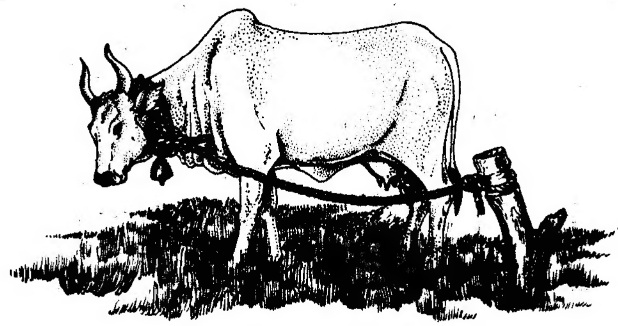
या कंपनीत शंकर नावाचा एक माणूस काम करीत असे. कंपनीचा परिसर स्वच्छ व सुंदर ठेवण्याची जबाबदारी शंकरच्या अंगावर होती. बागकामातील एक चांगला माहीतगार म्हणून



आकृती 1(अ)



आकृती 1(ब)

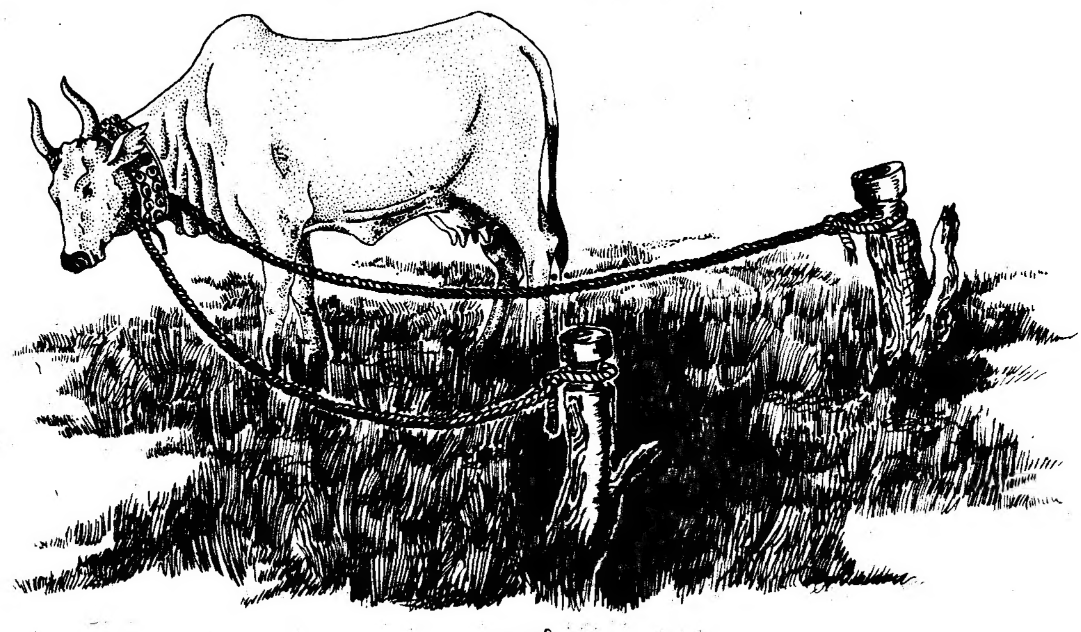


आकृती 2

शंकरचा लौकिक होता. शंकरच्या शेजारी त्याचा मित्र चंदू रहात असे. तो एका छोट्या ऑफिसात साधा कारकून होता. शंकर नोकरी करीत असलेली कंपनी, तिच्या आलिशान इमारती व भोवतालचा सुंदर परिसर याविषयी चंदूने बरेच काही ऐकले होते. कधीतरी आपण स्वतः जाऊन ते सर्व बघावे, असे त्याच्या मनात वारंवार येई. एके दिवशी त्याने शंकरला तशी विनंती केली व शंकरने ती ताबडतोब मान्यही केली.

या परिसराच्या प्रवेशद्वारापाशी जेव्हा ते दोघे येऊन पोहोचले तेव्हा तेथील सर्व दृश्य पाहून चंदू चांगलाच आश्चर्यचकित झाला. लांबवर उत्तरत जाणाऱ्या मस्त हिरवळी — कोवळ्या, लुसलुशीत गवतापात्यांनी चकाकणाऱ्या — आणि त्या हिरव्या गालिच्यावर, अधूनमधून, डौलाने उभी असलेली फुलांची नाजूक वंशावळ, वाऱ्यावर डोलणारी पण अबोल ! सगळा परिसरच डोळ्यांना सुखविणारा आणि मनाला भुरळ पाडणारा होता.

हिरवळीवरून फेरफटका मारताना चंदू अचानक एके ठिकाणी थांबला. त्याच्या डाव्या बाजूस पिवळ्याजर्द झेंडूंचे एक सुरेख बेट होते, तर उजव्या बाजूस चिनी गुलाबांची छोटी वस्ती होती. एका गोष्टीने त्याचे लक्ष खास वेधून घेतले. झेंडूचे बेट बरोबर वर्तुळाकार होते, तर एका लंबवर्तुळाकार जागेत



आकृती 3

लाल-डाळिंबी रंगाचे चिनी गुलाब दाटीवाटीने उभे होते (आकृत्या 1 (अ) व 1 (ब) पहा). हे दोन्ही आकार इतके नेमके होते, की चंदूला त्याचे नवल वाटल्याखेरीज राहिले नाही. शंकरच्या नजरेला त्याने ही गोष्ट आणून दिल्यावर शंकरने त्याला जे काही सांगितले ते ऐकून तर त्याचा त्याच्या कानांवर विश्वासच बसेना. भूमितीतील हा प्रश्न जेव्हा शंकरसमोर आला तेव्हा त्याच्यामधील शेतकरी जागा झाला होता आणि त्यानेच त्याला मार्गदर्शन केले होते. भूमितीचा कोणता होता तो प्रश्न ? शंकर सांगू लागला :

उत्तम बागबगीचा करायचा या दृष्टीने काही वर्षांपूर्वी जेव्हा मी मनाशी आखणी करीत होतो तेव्हा एके दिवशी अचानक या जागी आलो. त्या वेळी ही जागा म्हणजे काट्याकुट्यांनी भरलेला, घाणेरडा, जंगली प्रदेश होता. सगळीकडे रानगवत माजले होते. या ठिकाणी, जागा स्वच्छ करून, काही फुलझाडे लावली तर हा प्रदेश किती सुंदर करता येईल, असा मी विचार केला. यासाठी मी काय केले ठाऊक आहे ? तुझा विश्वास नाही बसणार ! मी चक्क एक गाय आणली आणि एका जाडजूड खुंट्याला तिला एका लांब दोरीने बांधून टाकले. गाय दिवसभर चरत होती. संध्याकाळी पाहतो, तो त्या ठिकाणी एक सुंदर वर्तुळ तयार झाले होते. त्या वर्तुळातील जवळजवळ सर्व गवत गायीने खाऊन टाकले होते. मी त्या मुक्या प्राण्याकडे कौतुकाने पाहिले आणि ती वर्तुळाकार जागा झेंडूची फुले लावण्यासाठी निश्चित केली.

यावरून मला आणखी एक कल्पना सुचली. त्या गायीला मी पलीकडे घेऊन गेलो आणि दोन भक्कम खुंटांना तिला एका लांबलचक दोरीने बांधून टाकले. तिच्या गळ्यातील पट्ट्यातून ती दोरी फक्त सरकवून घेतली होती. पट्ट्यावर घुंगुराची माळ होती आणि चरताना दिवसभर त्यातून मंजुळ किणकिणाट येत होता. गाय दिवसभर मनसोक्त चरली. आणि संध्याकाळी ?..... तुझा विश्वास नाही बसणार पण सांगतो, की या जागी एक झकास लंबवर्तुळ तयार झाले होते — इतके परिपूर्ण लंबवर्तुळ, की कुणाला वाटावे नक्की एखाद्या इंजिनिअरनेच ते काढले आहे !

## 3. सहा - एक महाप्रकरण

तुम्ही कधीतरी क्रिकेटचा सामना बघायला गेला असाल. क्रिकेटचा खेळ पाहताना सर्वजण एका फटक्याची आतुरतेने वाट पहात असतात : फलंदाजाने मारलेला षटकाराचा भीमटोला — आकाशातून सरसरत येऊन सीमेपलीकडे आदळणारा! फलंदाज जेव्हा हा फटका मारतो तेव्हा मैदानातील सर्व प्रेक्षक थरारून जातात व उत्स्फूर्तपणे उभे राहून टाळ्यांच्या कडकडाटात फलंदाजाचे अभिनंदन करतात. क्रिकेटच्या खेळात सहा या अंकाचे महत्त्व अशा प्रकारे जरी ताकद आणि नैपुण्य यांच्याशी जोडले गेलेले असले तरी हा अंक त्याच्या इतर गुणांमुळेही वैशिष्ट्यपूर्ण आहे.

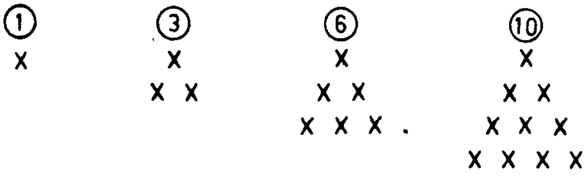
सहा ही एक परिपूर्ण (perfect) संख्या आहे. एखाद्या संख्येला पूर्ण भाग देणाऱ्या सर्व संख्यांची [भाजकांची] बेरीज जेव्हा त्या संख्येएवढी असते [अर्थात, भाग देणाऱ्या या संख्यांमध्ये मूळ संख्येचा समावेश करायचा नाही.] तेव्हा त्या संख्येला परिपूर्ण संख्या म्हणतात. 6 ला पूर्ण भाग देणाऱ्या संख्या म्हणजे 1, 2 व 3. $1+2+3=6$, म्हणून 6 ही परिपूर्ण संख्या आहे. 28 ही आणखी एक परिपूर्ण संख्या आहे. 28 ला 1, 2, 4, 7 व 14 ने भाग जातो. तसेच, $1+2+4+7+14=28$.

परिपूर्ण संख्येचा आणखी एक विशेष म्हणजे तिच्या सर्व भाजकांच्या व्यस्तांकांची बेरीज नेहमी 2 येते. उदाहरणार्थ, 6 चे सर्व भाजक म्हणजे 1, 2, 3 व 6, व $1/1+1/2+1/3+1/6=2$. तसेच, 28 चे सर्व भाजक म्हणजे 1, 2, 4, 7, 14, व 28, व $1/1+1/2+1/4+1/7+1/14+1/28=2$.

संख्यांच्या क्रमानुसार पहिल्या चार परिपूर्ण संख्या म्हणजे 6, 28, 496 व 8128. परिपूर्ण संख्यांचे अनेक चमत्कारिक गुणधर्म आहेत, अशी समजूत पूर्वीच्या काळी पाश्चात्यांमध्ये प्रचलित होती. 6 ही सर्वात लहान परिपूर्ण संख्या असल्यामुळे विश्व निर्माण करायला परमेश्वराला 6 दिवस लागले, ही त्यातलीच एक अंधश्रद्धा होती.

6 ही त्रिकोणीय संख्या आहे. 1, 3, 6, 10, 15 इत्यादि संख्यांना त्रिकोणीय संख्या म्हणतात. याचे कारण 3, 6, 10

किंवा 15 एवढ्या फुल्या जर आपण घेतल्या तर त्या एका त्रिकोणावर आपण मांडू शकतो [आकृती 1 पहा].




आकृती 1

मधमाश्यांना 6 ही संख्या आवडते. जगाच्या पाठीवर आपण कुठेही जा; मधमाश्यांच्या पोळ्यातील प्रत्येक घर षट्कोनी असलेले आपल्याला आढळेल. मधमाश्यांची षटकोनी घरे पाहून, पूर्वी होऊन गेलेला, ॲलेक्झांड्रियाचा पॅपस नावाचा एक विख्यात गणिती म्हणाला, "मधमाश्यांना भूमितीची जाणीव उपजत असते की काय कुणास ठाऊक.....परंतु त्यांना हे माहीत असले पाहिजे, की दिलेल्या द्रव्याच्या वापरातून, जास्त मध साठविण्यासाठी, जर घरे बांधायची असतील तर त्रिकोणी किंवा चौरस आकारापेक्षा षटकोनी आकार बरा."

मधमाश्यांना जात्याच भूमितीचे आकलन असते, की अनेक वेळा अपयशी प्रयत्न केल्यानंतर षटकोनाचा हा गुणधर्म त्यांना अवगत झालेला असतो, हे कुणालाच निश्चित माहीत नाही. परंतु एवढे मात्र खरे, की एकाच परिमितीचा समभुज त्रिकोण, चौरस किंवा षटकोन घेतला तर षटकोनाचे क्षेत्रफळ इतर दोघांपेक्षा जास्त असते. आपल्याला हे सहज सिद्ध करता येते [आ. 2 पहा].

ABC हा समभुज त्रिकोण आहे. त्याची प्रत्येक भुजा a इतकी आहे. त्याचे सर्व कोनही एकरूप (60°) आहेत. AR हा A पासून BC वर लंब आहे. ABC हा समभुज त्रिकोण असल्यामुळे AR हा लंब BC चे दोन सारखे भाग करतो. BR=RC=a/2. आता, पायथॅगोरस्च्या प्रमेयानुसार, एखाद्या काटकोन त्रिकोणातील काटकोनाच्या विरुद्ध असलेल्या भुजेच्या (कर्णाच्या) लांबीचा वर्ग इतर दोन भुजांच्या लांबीच्या वर्गांच्या बेरजेएवढा असतो. म्हणून $\triangle ABR$ मध्ये,

$$AB^2=BR^2+AR^2$$

$$\therefore a^2 = (a/2)^2+AR^2$$

$$\therefore AR^2=3a^2/4$$

$$\therefore AR = a\sqrt{3}/2 \ldots\ldots (1)$$

कोणत्याही बंदिस्त आकृतीची परिमिती (S) म्हणजे, तिच्यावरून एक प्रदक्षिणा पूर्ण करताना काटलेले अंतर. a भुजा असलेल्या समभुज त्रिकोणाची परिमिती $= a+a+a=3a$

$\therefore S=3a$

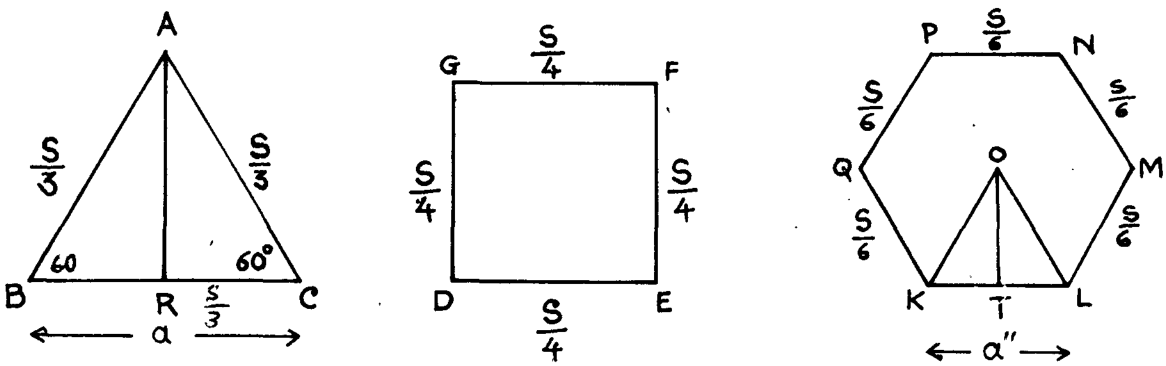
किंवा $a=S/3 \ldots\ldots (2)$.

सूत्र [1] मध्ये ही किंमत घालून,

$AR=S/3\times\sqrt{3}/2=S/2\sqrt{3} \ldots\ldots (3)$

$\triangle ABC$ चे क्षेत्रफळ $=1/2\times$पाया$\times$उंची

$=1/2\times(BC)\times(AR)$




आकृती 2

BC=a व AR=$a\sqrt{3}/2$.... (सूत्र (1) वरून)
या किंमती घालून $\triangle$ABC चे क्षेत्रफळ
$=1/2\times(a)\times(a\sqrt{3}/2)=a^2\sqrt{3}/4$......(4)

a =S/3 ही किंमत घालून $\triangle$ABC चे क्षेत्रफळ
$= S^2/9\times\sqrt{3}/4=S^2/4\times3\sqrt{3}$
$= S^2/12\sqrt{3}$.........(5)

आता चौरसाचा विचार करू. आपणास प्रत्येक वेळी परिमिती तेवढीच, म्हणजे S इतकी ठेवायची आहे.

आकृती 2 मधील DEFG हा चौरस पहा. याची प्रत्येक बाजू $a'$ आहे.

म्हणजेच या चौरसाची परिमिती $S=4a'$ आहे.

या चौरसाचे क्षेत्रफळ $= a'^2=S^2/16$.......(6)

आता षटकोनाकडे वळू. षटकोनाची प्रत्येक बाजू $a''$ आहे. म्हणजेच त्याची परिमिती $S=6a''$ किंवा $a''=\frac{S}{6}$.

आता एक गोष्ट लक्षात घ्या. षटकोनाचे क्षेत्रफळ म्हणजे आकृती 2 मध्ये दाखविलेल्या सहा त्रिकोणांच्या क्षेत्रफळांची बेरीज होय. या आकृतीत O हे षटकोनाचे केंद्र दाखविले आहे व सहाही त्रिकोणांचा तो सामाईक शिरोबिंदू आहे. हे सर्व सहा त्रिकोण एकमेकांशी एकरूप आहेत. अर्थात त्यांची क्षेत्रफळे सारखीच आहेत.

KLMNPQ षटकोनाचे क्षेत्रफळ $=6\times$ [OKL त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ].

सहाही त्रिकोण समभुज आहेत [त्यांचे सर्व कोन $60^\circ$ आहेत]

$\therefore$ OKL या समभुज त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ $=a''^2\sqrt{3}/4$ [सूत्र (4) पहा].

परंतु $a''=\frac{S}{6}$ (येथे S ही स्थिर परिमिती आहे.)
$\therefore$ KLMNPQ षटकोनाचे क्षेत्रफळ $=6\times a''^2\sqrt{3}/4$
$=6\times S^2/36\times\sqrt{3}/4$
$=S^2/8\sqrt{3}$.......(7)
सूत्रे (5), (6) व (7) वरून, S एवढी एकच परिमिती असलेल्या समभुज त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ $=S^2/12\sqrt{3}$,

चौरसाचे क्षेत्रफळ $=\frac{S^2}{16}$,

व षटकोनाचे क्षेत्रफळ $=S^2/8\sqrt{3}$.

या तीन संख्यांचे छेद आहेत अनुक्रमे $12\sqrt{3}$, 16 व $8\sqrt{3}$. 4 या समान अवयवाने भागल्यावर $3\sqrt{3}$, 4 व $2\sqrt{3}$ अशा संख्या येतात. आता $\sqrt{3} \doteqdot 1.732$ (सुमारे)

$\therefore 3\sqrt{3} \doteqdot 5.196$ (सुमारे) व $2\sqrt{3} \doteqdot 3.464$ (सुमारे)

$\because 5.196>4>3.464$

$\therefore 3\sqrt{3} > 4 > 2\sqrt{3}$

म्हणजेच, 4 ने गुणल्यावर,

$12\sqrt{3} > 16 > 8\sqrt{3}$

ज्या अर्थी या संख्या छेदात आहेत त्या अर्थी,

$S^2/12\sqrt{3}<S^2/16<S^2/8\sqrt{3}$.

म्हणजेच, ABC [समभुज] त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ < DEFG चौरसाचे क्षेत्रफळ < KLMNPQ षटकोनाचे क्षेत्रफळ. थोडक्यात, एकच परिमिती असताना, षटकोनाचे क्षेत्रफळ हे त्रिकोण व चौरसाच्या क्षेत्रफळापेक्षा जास्त असते.

समभुज त्रिकोण, चौकोन, पंचकोन, षटकोन, अष्टकोन इत्यादि अनेक नियमित बहुभुजाकृती आहेत. अशा आकृत्यांच्या भुजांची संख्या जशी वाढवीत जावे, अर्थात त्यांची परिमिती (S) कायम ठेवून, तसे त्यांचे क्षेत्रफळ वाढत जाते. शेवटी, भुजांची संख्या जास्त झाल्यावर, आपण वर्तुळाच्या जवळ येऊन पोहोचतो. तेवढ्याच परिमितीच्या वर्तुळाचे क्षेत्रफळ या सर्व बहुभुजाकृतींपेक्षा जास्त असते.

6 चे विभाज्य [गुणिते] : 6 च्या पटी केल्यावर ज्या संख्या मिळतात त्यांना 6 चे विभाज्य म्हणतात; जसे, 12, 18, 24 30..... इत्यादि. ज्या संख्या 3 व तसेच 2 या संख्यांचे विभाज्य असतात त्या अर्थातच 6 चेही विभाज्य असतात. म्हणून 6 ने भाग जाण्यासाठी स्वतंत्र कसोटी लावण्याचे कारण उरत नाही. परंतु 6 च्या विभाज्यांकडे एका वेगळ्या दृष्टीने पाहून काही गमतीचे हाती लागते का, ते पाहू.

आता (2, 4, 6, 8, 10......) हा समसंख्यांचा संच आहे.

या संचाचे 6 शी गमतीचे नाते आहे. या संचाचे, प्रत्येकी तीन संख्या असलेले, उपसंच जर आपण तयार केले, म्हणजे (2, 4, 6), (8, 10, 12), (14, 16, 18)…. इत्यादि, तर आपल्या असे लक्षात येईल की, प्रत्येक उपसंचातील पहिल्या दोन संख्यांची बेरीज 6 चा विभाज्य आहे व शेवटची संख्याही 6 चा विभाज्य आहे.

आता (2, 3, 5, 7, 11, 13, 17…) हा संच पहा. हा मूळ [अविभाज्य] संख्यांचा संच आहे. [मूळ संख्येला फक्त 1 व ती संख्या यांनीच भाग जातो. मूळ संख्यांच्या संचात 1 या संख्येचा समावेश करीत नाहीत.] या संचाचेही 6 शी अनपेक्षित नाते असलेले दिसून येते. या संचातील, 2 व 3 सोडून दुसरी कोणतीही, p संख्या घेतली तर असे दिसते की, $(p-1)$ किंवा $(p+1)$ यापैकी कोणता तरी एक 6 चा विभाज्य असतो. [या ढिकाणी 2 व 3 या संख्या वगळल्या आहेत, कारण $(2+1)$ व $(3+1)$ या संख्या 6 पेक्षा लहान आहेत.] या विधानाच्या खरेपणाविषयी थोडी शंका निर्माण होऊ शकेल, कारण मूळ संख्यांचा संच अमर्याद आहे आणि या संचातील संख्या मिळविण्याचे एखादे सूत्रही कुणाला माहीत नाही. परंतु वरील विधान आपण सहज सिद्ध करू शकतो.

समजा p ही 2 किंवा 3 सोडून दुसरी एक मूळ संख्या आहे. तिला फक्त 1 व p नेच भाग जातो. म्हणून p ला 2 ने भाग जात नाही. अर्थात, p ही सम संख्या नाही. म्हणजेच, सर्व $p>3$ या विषम संख्या असतात. किंवा, निराळ्या शब्दांत, $(p-1)$ व $(p+1)$ या नेहमी सम संख्या असतात. म्हणून $(p-1)$ व $(p+1)$ यांना 2 ने भाग जातो. आता p ला 3 ने भागण्याविषयी विचार करू. कोणत्याही संख्येचा भागाकार केल्यानंतर उरणारी बाकी भाजकापेक्षा नेहमीच लहान असते, हे आपल्याला माहीत आहे. म्हणून 3 ने भागल्यावर बाकी 0, 1 किंवा 2 उरते. अर्थात, $p>3$ ला 3 ने भागल्यावर बाकी शून्य उरणे शक्य नाही, कारण p ही मूळ संख्या आहे. म्हणून, अशा वेळी, बाकी 1 किंवा 2 उरेल. $\therefore$ $p=3n+1$ किंवा $p=3n+2$, असे आपण लिहू शकू. [येथे n हा धन पूर्णांक आहे.]

[अ] जर $p=3n+1$ असेल तर $(p-1)=3n$. म्हणजेच, $(p-1)$ ला 3 ने भाग जाईल. तसेच, $(p-1)$ ही सम संख्या असल्यामुळे तिला 2 नेही भाग जाईल. म्हणून $(p-1)$ हा 6 चा विभाज्य असेल.

[ब] जर $p=3n+2$ असेल तर $(p+1)=3n+3$. म्हणजेच, $(p+1)$ ला 3 ने भाग जाईल. तसेच, $(p+1)$ ही सम संख्या असल्यामुळे तिला 2 नेही भाग जाईल. म्हणून $(p+1)$ हा 6 चा विभाज्य असेल.

थोडक्यात, 3 पेक्षा मोठी असलेली p ही कोणतीही मूळ संख्या असेल तर $(p-1)$ किंवा $(p+1)$ यापैकी कोणती तरी एक संख्या 6 ची विभाज्य असते. उदाहरणार्थ, 17 ही मूळ संख्या घेतली, तर $(17+1)=18$ हा 6 चा विभाज्य आहे. 13 या संख्येच्या बाबतीत $(13-1)=12$ हा 6 चा विभाज्य आहे.

येथे एक गोष्ट लक्षात घेतली पाहिजे. 3 ने भाग जाण्याच्या वरील कसोटीचा p ही मूळ संख्या आहे या गोष्टीशी काहीही संबंध नाही. कोणत्याही तीन क्रमवार संख्या घेतल्या तर त्यातल्या एकीला निश्चितपणे 3 ने भाग जातो. किंबहुना, क्रमवार अशा K संख्या घेतल्या तर त्यातल्या एका संख्येला K ने निश्चित भाग जातो.

आता 6 च्या विभाज्यांचा संच घेऊ : {6, 12, 18, 24, 30,……}. या संचातील सर्व संख्यांचे शेवटचे अंक सम असल्याचे दिसून येईल. याचा अर्थ, एखाद्या संख्येचा शेवटचा अंक जर विषम असेल तर त्या संख्येला 6 ने भाग जाणार नाही. [उदा., 457, 61, 2269, इत्यादि]. या संचाबद्दल काही गमतीच्या गोष्टी पुढीलप्रमाणे :

[अ] या संचातील 6 किंवा 0 शेवटचे अंक असणाऱ्या संख्या घ्या. [उदा., 36, 90 इत्यादि]. या संख्यांचे शेवटचे अंक पुसा; उरलेल्या संख्या 3, 6, 9, 12…… या गणित श्रेढीमधील संख्या असतील. [उदा., 33576 हा 6 चा विभाज्य आहे. यातील शेवटचा अंक 6 पुसल्यावर 3357 ही संख्या उरते. ही संख्या 3, 6, 9, 12,…..या गणित श्रेढीत येते. [कारण, 3357 ला 3 ने भाग जातो.]

[ब] या संचातील 2 किंवा 8 शेवटचे अंक असणाऱ्या संख्या घ्या. [उदा., 42, 18 इत्यादि]. या संख्यांचे शेवटचे अंक पुसा; उरलेल्या संख्या 1, 4, 7, 10….. या गणित श्रेढीतील संख्या असतील. [उदा., 552 हा 6 चा विभाज्य आहे. यातील शेवटचा 2 अंक पुसल्यावर 55 ही संख्या उरते. ही संख्या 1, 4, 7, 10,…. या गणित श्रेढीत येते.]

[क] या संचातील 4 शेवटचा अंक असणाऱ्या संख्या घ्या [उदा., 24, 54, इत्यादि]. या संख्यांतील शेवटचा 4 अंक पुसल्यावर उरणाऱ्या संख्या 2, 5, 8, 11,..... या गणित श्रेढीतील संख्या असतील. [उदा., 924 हा 6 चा विभाज्य आहे. यातील शेवटचा 4 अंक पुसल्यावर 92 ही संख्या उरते. ही संख्या 2, 5, 8, 11,..... या गणित श्रेढीत येते.]

## 4. ते पुन्हा केव्हा भेटणार ?

शाळेत गणित शिकत असता, दिलेल्या संख्यांचा लघुतम साधारण विभाज्य किंवा ल.सा.वि. (Least Common Multiple) काढायला मुलांना शिकवितात. या विषयाला मुले फार घाबरतात. दिलेल्या संख्यांची विशिष्ट आकडेमोड करून त्यांचा ल. सा. वि. काढावा लागतो. यासाठी त्या संख्यांचे प्रथम अवयव पाडावे लागतात. म्हणजेच, त्या संख्या त्यांच्या गुणाकाराच्या स्वरूपात लिहाव्या लागतात. हे अवयव त्या संख्यांमध्ये दडलेले असतात. संख्यांकडे नुसते पाहून ते दिसत नाहीत. यानंतर त्या अवयवांची विशिष्ट पद्धतीने निवड करून उत्तर काढायचे असते. उदा., 4 व 6 यांचा ल.सा.वि. काढण्यासाठी $4 = \underline{2}\times2$, $6 = \underline{2}\times3$. येथे 2 हा अवयव [रेषा मारलेला] सामाईक आहे. उरलेले अवयव 2 व 3 आहेत. म्हणून, 4 व 6 चा ल.सा.वि. $2\times2\times3=12$ इतका येतो. 4 व 6 या संख्यांनी भाग जाणारी सर्वात लहान संख्या 12 आहे. [म्हणजेच, 12 हा 4 व 6 चा ल.सा.वि. आहे.] खरे तर, 12 चे कोणतेही विभाज्य घेतले तर त्या सर्व संख्यांना 4 व 6 नी भाग जाईल. उदा., 24, 36, 48,..... इत्यादि. परंतु या सर्व संख्यांमध्ये 12 ही संख्या सर्वात लहान आहे. म्हणून 12 ला 4 व 6 चा ल.सा.वि. म्हणतात.

ल.सा.वि. आपल्या आयुष्यात अगदी सहजपणे कसा येतो, याची एक गोष्ट आम्ही प्रथम येथे सांगणार आहोत. त्यानंतर दुसरे तसेच गमतीदार कोडे पाहू.

एका गावात एक कापडाचा दुकानदार होता. घरोघर जाऊन कापड, साड्या विकण्यासाठी त्याने तीन माणसे पदरी नेमली होती – आनंद, प्रेमचंद व रूपचंद या नावाची. यातील, आनंद प्रत्येक 3 दिवसांनी दुकानात येऊन मालकाला पैसे द्यायचा व नवीन माल घेऊन जायचा, तसेच प्रेमचंद दर 4 दिवसांनी तर रूपचंद दर 6 दिवसांनी हिशेबासाठी दुकानात




आकृती 1

यायचे. समजा 1 जानेवारीला ते तिघेही दुकानात आले होते. तर यानंतर कोणत्या दिवशी ते दुकानात पुन्हा एकमेकांना भेटतील ?

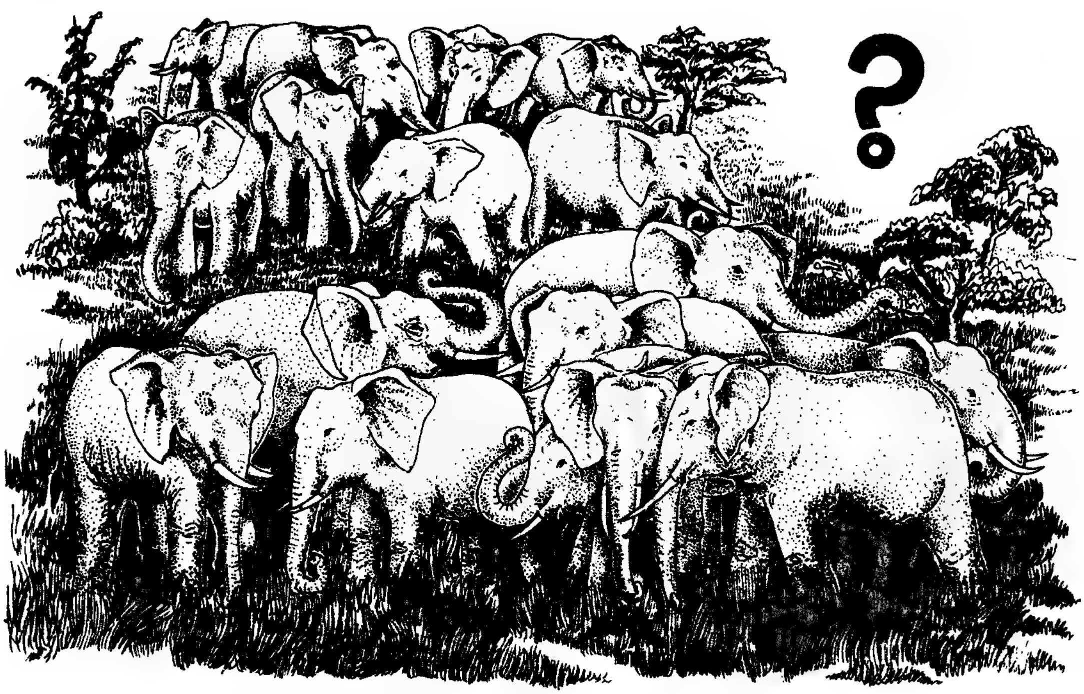
हे गणित सोडविण्याचा एक मार्ग म्हणजे, दुकानाला भेटी देण्याच्या त्यांच्या तारखांचा तक्ता तयार करणे. हा तक्ता पुढील-प्रमाणे होईल.

| आनंदच्या तारखा | प्रेमचंदच्या तारखा | रूपचंदच्या तारखा |
|---|---|---|
| * 1 जानेवारी | * 1 जानेवारी | * 1 जानेवारी |
| 4 ,, | 5 ,, | 7 ,, |
| 7 ,, | 9 ,, | *13 ,, |
| 10 ,, | *13 ,, | 19 ,, |
| *13 ,, | 17 ,, | *25 ,, |
| 16 ,, | 21 ,, | 31 ,, |
| 19 ,, | *25 ,, | |
| 22 ,, | 29 ,, | |
| *25 ,, | | |
| 28 ,, | | |
| 31 ,, | | |

दुकानात एकत्र भेटण्याच्या त्यांच्या तारखांवर या तक्त्यात * अशा खुणा केल्या आहेत. म्हणजे, 1 जानेवारी, 13 जानेवारी, 25 जानेवारी इत्यादि दिवशी ते तिघे दुकानात एकत्र भेटतील. यांतील प्रत्येक दोन भेटींमध्ये 12 दिवसांचे कालांतर आहे. हे कालांतर सतत तेवढेच राहते, हे तुम्हाला सहज तपासून पाहता येईल. तसेच, 3, 4 व 6 चा 12 हा ल.सा.वि. आहे, हेही तुम्हाला समजेल. ($3=\underline{3}\times1$, $4=\underline{2}\times2$, $6=\underline{2}\times\underline{3}$. म्हणून ल.सा.वि. $=3\times2\times2=12$).

12 हे उत्तर अभावितपणे आले का ? मुळीच नाही ! 3, 4 व 6 सोडून तुम्ही त्या विक्रेत्यांच्या दुकान-भेटीसाठी दुसऱ्या संख्या निवडा. प्रत्येक वेळी ल.सा.वि. हेच उत्तर येते, असे तुम्हाला दिसून येईल. [उदा., दर 2, 3 व 5 दिवसांनी ते तीन विक्रेते, हिशेबासाठी, दुकानात येतात असे समजले तर ते सर्वजण प्रत्येकी 30 दिवसानंतर एकत्र येतील. (2, 3 व 5 यांचे अवयव पडत नाहीत. म्हणून त्यांचा ल.सा.वि. $=2\times3\times5=30$.) प्रत्येक वेळी तक्ता तयार करून तुम्हाला या गोष्टीची खात्री करून घेता येईल.

आता एक गमतीचे कोडे ! एका गावात एक सरदार रहात होता. पैशाची उधळपट्टी केल्यामुळे म्हातारपणी त्याला दारिद्र्य




आकृती 2

भोगावे लागत होते. त्याची इस्टेट अशी काही उरली नव्हतीच. नाही म्हणायला, त्याच्याजवळ शेवटचे 17 हत्ती होते. ते त्याला त्याच्या तीन मुलांत वाटायचे होते. मात्र पहिल्या मुलाला या इस्टेटीचा $\frac{1}{2}$ भाग, दुसऱ्याला $\frac{1}{3}$ भाग व शेवटच्याला $\frac{1}{9}$ भाग मिळावा, अशी त्याची इच्छा होती. परंतु हे करायचे कसे ?

अर्थात , हा प्रश्न तसा सरळ सोडविण्यासारखा नाही, कारण एवढ्या साध्या कारणासाठी कुणी हत्तींची कापाकापी करीत नाही. सर्वसाधारणपणे, या कोड्याचे उत्तर देण्यासाठी एक युक्ती सांगितली जाते. त्या युक्तीने हे कोडे सुटते. परंतु, अशा प्रकारे उत्तर शोधणे ही शुद्ध बनवाबनवी ठरते. युक्ती अशी : सरदार कोड्यात पडल्यामुळे त्याने त्याच्या मित्राला सल्ल्यासाठी बोलाविले. हा मित्र गरीब होता आणि म्हणून 'हुशार' होता. त्या मित्राजवळ एक हत्ती होता. त्याने काय केले? आपल्याजवळचा हत्ती त्या 17 हत्तींमध्ये मिळवून त्याने 18 हत्तींचा गट तयार केला. मग त्याने, या गटाचा $\frac{1}{2}$ भाग पहिल्या मुलाने, $\frac{1}{3}$ भाग दुसऱ्या मुलाने व $\frac{1}{9}$ भाग तिसऱ्या मुलाने घ्यावा, असे सुचविले. त्याप्रमाणे वाटणी झाली. पहिल्याला $\frac{1}{2}\times18=9$ हत्ती, दुसऱ्याला $\frac{1}{3}\times18=6$ हत्ती व तिसऱ्याला $\frac{1}{9}\times18=2$ हत्ती मिळाले. अशा प्रकारे $9+6+2=17$ हत्ती वाटून झाल्यानंतर, उरलेला आपला हत्ती घेऊन तो मित्र घरी चालू लागला. सुदैवाने,प्रत्येकालाच त्याला मिळणाऱ्या हत्तींपेक्षा जास्त हत्ती मिळाल्यामुळे कुणी कुरकुर केली नाही. [या ठिकाणी, 17चे भाग न पाडता 18चे पाडले होते, हे लक्षात घ्यायला हवे.]

हे [किंवा अशा प्रकारचे] कोडे आणि त्याची उकल एका साध्या गोष्टीवर आधारित आहे. ती गोष्ट म्हणजे, $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}=17/18$. हे कोडे कसे रचायचे ते आता पाहू. प्रथम काही अपूर्णांक घेऊन त्यांची बेरीज करा. या सर्व अपूर्णांकांच्या अंशस्थानी 1 असला पाहिजे व त्यांची बेरीजही 1 पेक्षा कमी भरली पाहिजे. उदा., $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}=57/60$. या ठिकाणी सरदाराला चार मुले असतील, त्याच्याजवळ 57 हत्ती असतील, त्याच्या मित्राजवळ 3 हत्ती $(60-57=3)$ असतील व चार मुलांत $\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5}$ व $\frac{1}{6}$ या प्रमाणात हत्तींची वाटणी होईल. अर्थात त्या मित्राला त्याचे 3 हत्ती शेवटी परत मिळतीलच, कारण वाटणी अशी होईल : $(1/3\times60)+(1/4\times60)+(1/5\times60)+(1/6\times60)=20+15+12+10=57$.

आपल्या वाट्यास किती 'इस्टेट' येणार, हे पाहण्यासाठी अधिर झालेले असले स्वार्थी भाऊ कितीही संख्येने अशा कोड्यात येऊ शकतात, हे सांगायला नकोच.

## 5. बुद्धीची कोठेही कमतरता नाही

फार पूर्वीची गोष्ट. एका खेडेगावात गौतम नावाचा एक गरीब माणूस रहात होता. कुणाच्यातरी शेतावर रोज काम करावे व दिवसअखेर मिळणाऱ्या तुटपुंज्या मजुरीत गुजराण करावी, असे त्याचे दिवस चालले होते. दिवसभराच्या ढोर मेहनतीबद्दल त्याला मिळत असत,दिवसाकाठी,एकेक रुपयांची फक्त 2 नाणी. मात्र, कामसू बायको व किसन नावाचा एक मुलगा असे लहान कुटुंब असल्यामुळे त्याला रोजच्या भाकरतुकड्याची कधीच चणचण भासत नसे. गौतम अशिक्षित होता. त्याला फक्त 5 पर्यंत अंक मोजता यायचे ! शिकलेला नसला तरी गौतम अडाणी नव्हता. त्याने किसनला जवळच्याच एका शाळेत घातले होते. किसनने शिकून मोठे व्हावे असे त्याला सारखे वाटे. किसन हाही एक अभ्यासू व हुशार मुलगा होता. प्रत्येक परीक्षेत त्याचा पहिला नंबर असायचा. शाळेतील शिक्षकही किसनबद्दल मोठ्या आशा मनाशी बाळगून होते.

प्रत्येक दिवशी कामावरून परत आल्यानंतर गौतम त्याचे 2 रुपये एका छोट्या मडक्यात टाकायचा. हे मडके चांगल्या सुरक्षित ठिकाणी ठेवलेले असायचे. अधूनमधून या पैशांतून गौतम घरचा खर्च करी. तरीही महिना अखेरीस थोडे पैसे मडक्यात उरतच असत. या पैशांची छोटी पुरचुंडी गौतम आपल्या भावाजवळ ठेवायला देई. मग पुन्हा पुढला महिना सुरू ! गौतम स्वभावाने मनमिळाऊ असल्यामुळे त्याचे गावात खूप मित्र होते. हे मित्रही अडीनडीला त्याच्या उपयोगी पडायचे. गौतमच्या आयुष्यात त्यामुळे, चंगळ नसली तरी, जीवघेणी खडतरताही नव्हती. मीठभाकरी खाऊन तो सुखीसमाधानी होता.

दिवसांमागून दिवस चालले होते, आणि एक दिवस तो भयंकर प्रकार घडला. त्या दिवशी सकाळीच गौतमला कशासाठी तरी पैसे हवे होते. तो मडक्याजवळ गेला आणि पाहतो तो काय ? मडक्यातले सगळे पैसे चोरीला गेल्याचे त्याच्या ध्यानात आले. काय करावे हे त्याला क्षणभर समजेचना. थोड्या वेळाने त्या गावचा पाटील तेथे आला व त्याने गौतमची सगळी हकीकत ऐकली. ''मडक्यात किती रुपये होते ?'' पाटलाने विचारले. गौतमला फक्त 5 पर्यंतच मोजता येत असल्यामुळे निश्चित काहीच सांगता आले नाही. परंतु त्याने एक छोटीशी हकीकत सांगितली. आदल्या रात्री त्याने मडक्यातील रुपयांची नाणी बाहेर काढली होती. त्याने जेव्हा नाण्यांच्या दोन सारख्या चवडी केल्या तेव्हा एक नाणे उरत होते. आश्चर्याची गोष्ट म्हणजे, नाण्यांच्या तीन किंवा चार चवडी केल्यावरही तसेच होत होते. प्रत्येक वेळी एक नाणे उरत होते. पाच सारख्या चवडी केल्यावर मात्र सर्व नाणी समान विभागली जात होती — एकही नाणे उरत नव्हते.

आपल्या बापाचे हे बोलणे किसन आतल्या खोलीतून ऐकत होता. त्याने पाटीवर भराभर काही आकडेमोड केली आणि त्याला उत्तर सापडले : 'मडक्यात त्या रात्री 25 नाणी असली पाहिजेत.' हे ऐकून पाटीलबुवा, गौतम आणि जमलेली इतर मंडळी पार हतबुद्ध होऊन गेली. 'तुला कसे काय कळले हे ?' प्रत्येकाच्या चेहऱ्यावर एकच प्रश्न दिसत होता. किसनने सांगायला सुरुवात केली :

'ज्या अर्थी बाबा रोज 2 रुपये मिळवितात त्या अर्थी मडक्यात 60-62 पेक्षा जास्त नाणी असणे शक्य नाही. तसेच, नाण्यांच्या संख्येला 5 ने पूर्ण भाग गेला पाहिजे. 5 ने भाग जाणाऱ्या [60 च्या आतील] संख्यांचा संच म्हणजे, [5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60] आता यातील संख्यांना, बाबांनी बघितल्याप्रमाणे, 2, 3 व 4 च्या कसोट्या लावू. 2 ने भागल्यानंतर सर्व सम संख्या या संचातून बाहेर जातात. म्हणजेच, 10, 20, 30, 40, 50 व 60 यांतील कोणतेच उत्तर असणे शक्य नाही. म्हणून [5, 15, 25, 35, 45, 55] हा विषम संख्यांचा संच उरला. यांतील 15 व 45 ना 3 ने पूर्ण भाग जातो [बाकी शून्य], तर 5 व 35 ना 3 ने भागल्यावर बाकी 2 उरते. म्हणून या सर्व संख्या बाद ठरतात. तेव्हा [25,55] एवढाच संच उरला. यातील 55 ला 4 ने भागल्यावर बाकी 3 उरते, म्हणून ते उत्तर नव्हे. मात्र, 25 ला 4 ने भागल्यावर बाकी 1 उरते, म्हणून 25 हे उत्तर आले.' किसनच्या हुशारीचा आणखी काय पुरावा हवा होता तेथील लोकांना ?

किसनला 25 हे उत्तर सापडले, कारण ते 60 पेक्षा कमी असायला हवे होते म्हणून ! ही अट जर काढून टाकली तर तुम्हाला आणखीही उत्तरे सापडतील. उदाहरणार्थ, 25 सोडून 85 हेही उत्तर सापडेल : 85 ला 5 ने पूर्ण भाग जातो व 2, 3 व 4 ने भागल्यावर बाकी 1 उरते.

या कोड्याची सर्व उत्तरे कशी काढायची ?

समजा n हा असा धन पूर्णांक आहे, की 2, 3 व 4 ने त्याला भागल्यावर बाकी 1 उरते. म्हणजेच, (n−1) या पूर्णांकाला 2, 3 व 4 ने पूर्ण भाग जातो. याचा अर्थ, (n−1) हा 2, 3 व 4 चा ल.सा.वि. किंवा त्याचा कोणता तरी विभाज्य असला पाहिजे. 2, 3 व 4 चा ल.सा.वि. येतो 12. म्हणून (n−1) हा 12 किंवा त्याचा एखादा विभाज्य असला पाहिजे.

∴ (n−1) ही [12, 24, 36, 48, 60, 72, 84,....144.....] या संचातील एक संख्या असली पाहिजे.

∴ n ही [13, 25, 37, 49, 61, 73, 85.....145.....] या संचातील एक संख्या असली पाहिजे.

तसेच, पुढची अट म्हणजे n ला 5 ने पूर्ण भाग गेला पाहिजे. म्हणून n ही [25, 85, 145,.....] या संचातील कोणतीही एक संख्या असू शकते. गंमत म्हणजे, या संचातील प्रत्येक शेजारील जोडीतील संख्यांमध्ये 60 चा फरक आहे, आणि 60 हा 2, 3, 4 व 5 चा ल.सा.वि. आहे.

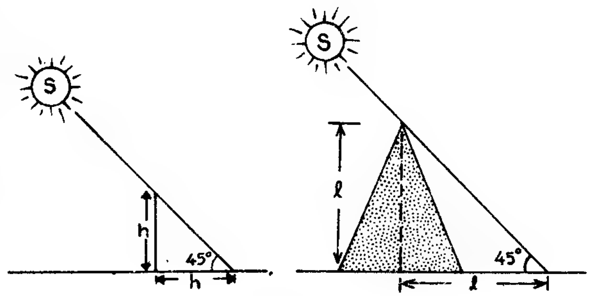
## 6. उद्‌बोधन करणाऱ्या सावल्या

डोक्यावर तळपणाऱ्या सूर्यापासून स्वतःचा बचाव करून घेण्यासाठी प्राचीन माणसाने खडकात कोरलेल्या गुहेचा आणि झाडाच्या सावलीचा आश्रय घेतला. यातूनच त्याचे सावलीशी नाते जुळत गेले. लहान मूल, एखादे वेळी, आपल्या सावलीलासुद्धा घाबरते आणि त्यापासून लांब पळून जाण्याचा व्यर्थ प्रयत्न करते. पण मोठे झाल्यावर तेच मूल आपल्या

हातांनी व बोटांनी भिंतीवर सावल्या पाडून मोठ्यांची करमणूक करते — पक्ष्यांच्या, हरणांच्या, फुलपाखरांच्या आणि म्हाताऱ्या माणसांच्यासुद्धा मजेदार सावल्या ! परंतु, केवळ वृक्षतळी आश्रय आणि मौजेचे खेळ, एवढाच काही सावल्यांचा उपयोग नाही. अनेक वेळा, अशक्य वाटणाऱ्या मोजमापांसाठी माणसाने सावल्यांचा उपयोग करून घेतला आहे. कसे ते पहा.

(1) पिरॅमिडची उंची : प्राचीन काळी (खिस्तपूर्व 600 वर्षे) थेल्स नावाचा एक ग्रीक पंडित होऊन गेला. खरे म्हणजे, तो तेलबियांचा व्यापारी होता. प्रवास करता करता तो एकदा इजिप्तमध्ये आला. प्रचंड पिरॅमिडचे भव्य दृश्य पहायचे होते त्याला. थेल्सच्या बुद्धिमत्तेची कीर्ति त्या काळी एवढी पसरली होती, की ग्रीसच्या सात महापंडितांत त्याची गणना होत असे. खरे पाहिले तर, त्या वेळी उपलब्ध असलेल्या भूमितीय ज्ञानाचे भूमितीशास्त्रात रूपांतर करण्याचे श्रेय थेल्सकडे जाते. पिरॅमिडच्या अद्‌भुत दर्शनाने थेल्स अवाक् झाला. एकदा अशाच एका प्रचंड पिरॅमिडच्या सौंदर्याचे चिंतन करीत असता, 'या वास्तूची उंची काढता येईल का,' असा प्रश्न थेल्सच्या मनात आला. परंतु हे शक्य कसे व्हायचे ? थेल्सने पिरॅमिडच्या सावलीवरून त्याची उंची काढण्याची एक नवी पद्धत शोधून काढली. ज्या वेळी एका उभ्या काठीची सावली त्या काठीच्या उंचीएवढी पडली होती त्या वेळी त्याने एका पिरॅमिडच्या सावलीची लांबी मोजली. या वेळी, अर्थातच, पिरॅमिडची उंचीही त्या सावलीएवढी असल्यामुळे, सावलीच्या लांबीवरून, त्याला पिरॅमिडची उंची काढता आली (आकृती 1 पहा.)

(2) दुपारची स्थानीय वेळ : पूर्वीच्या काळी,एखाद्या झाडाची किंवा खांबाची सावली पाहून, लोक किती वाजले असतील याचा अंदाज करीत असत. विशेषतः दुपार (मध्यान्ह) नेमकी केव्हा झाली याचे शेतकऱ्यांना व शेतमजुरांना फार महत्त्व असे. याला दोन कारणे होती. एक म्हणजे, ही वेळ काम थांबवून दुपारचे जेवण घेण्याची असे. दुसरे म्हणजे, जे शेतमजूर दिवसाच्या मजुरीने कामावर लावलेले असत त्यांनी अर्ध्या दिवसात किती काम केले, हे शेतमालकाला समजणे आवश्यक असे. कारण यावरून, कधी कधी, मजुरीची रक्कम ठरविली जाई. परंतु,जवळ घड्याळ नसताना हे ठरवायचे कसे ? यासाठी त्या काळी एक सोपी, परंतु बरीच अचूक अशी,



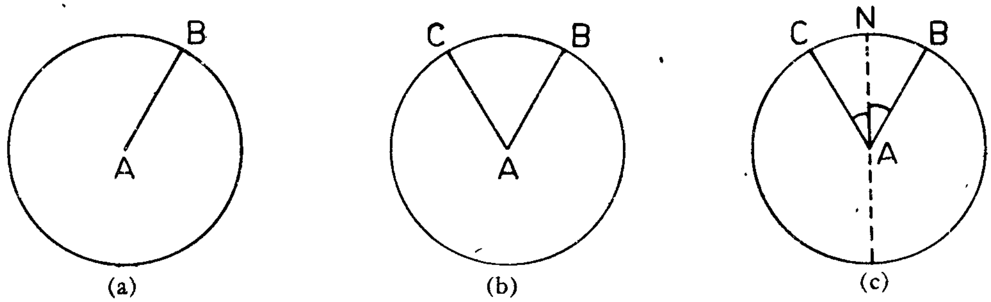

आकृती 1

पद्धत वापरत असत. यावरून त्या त्या ठिकाणची (स्थानीय) अर्ध्या दिवसाची (कामाच्या) वेळ समजत असे. ही पद्धत पुढीलप्रमाणे होती :

एका मोकळ्या सपाट जमिनीवर एक वर्तुळ काढीत असत. या वर्तुळाच्या केंद्रस्थानी (A) एक काठी उभी खोचून ठेवीत असत. सकाळी सूर्य पूर्वेला असताना या काठीच्या सावलीचे टोक, एका विशिष्ट वेळी, बरोबर वर्तुळाला स्पर्श करी (B या ठिकाणी). हा बिंदू केंद्राला जोडत असत (आकृती 2(a) पहा). आकाशातून सूर्य सरकत पश्चिमेला आला, की काठीची सावलीही वर्तुळाच्या विरुद्ध बाजूला येई व,एका विशिष्ट वेळी, वर्तुळाला पुन्हा स्पर्श करी (C या ठिकाणी) हा बिंदूही केंद्राला जोडत असत (आकृती 2(b) पहा). $\angle$ BAC या कोनाचा दुभाजक AN हा वर्तुळाला N या ठिकाणी छेदत असे. AN ही रेषा बरोबर त्या ठिकाणची (स्थानीय) उत्तर-दक्षिण दिशा दाखवीत असे. ही रेषा म्हणजेच दुपारची खूण (मध्यान्हीची खूण) होती. काठीची सावली AN रेषेवर आली की,दुपार झाली असे समजून, सर्वजण काम थांबवायचे. A या केंद्राभोवती जर अनेक वर्तुळे काढली (एककेंद्री) तर AN ची जागा निश्चित करणे सोपे जाई. अर्थात,ऋतुमानाप्रमाणे, दर काही दिवसांनी AN ची जागा नव्याने निश्चित करावी लागे.

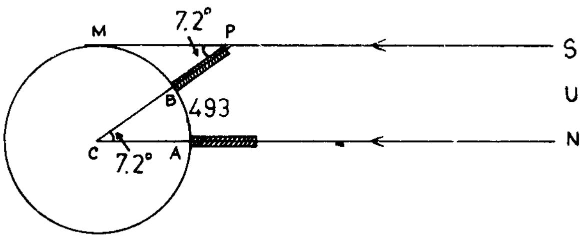
(3) खिस्तपूर्व सुमारे 200 वर्षांच्या आगेमागे एरॅटोस्थेनिस नावाचा एक प्रसिद्ध ग्रीक शास्त्रज्ञ इजिप्तमध्ये रहात होता. त्याची विद्वत्ता आणि कौशल्य पाहून त्याचे सर्व सहकारी त्याला फार मान देत असत. एका खांबाची सावली मोजून त्याने चक्क पृथ्वीचा परीघ किती असला पाहिजे, हे शोधून काढले.

इजिप्त हा उत्तर आफ्रिकेतील एक देश. इजिप्तमधून नाईल नावाची एक मोठी नदी वाहते. आपल्याला जशी गंगा, तशी इजिप्तवासियांना नाईल नदी. आजूबाजूचा प्रदेश सुपीक करीत




आकृती 2

ही नदी वाहते. या नदीचे ऐतिहासिक महत्त्व फार आहे. या नदीकाठीच पुरातन काली एक महान संस्कृति नांदत होती. नाईल नदीच्या काठावरच आस्वान नावाचे एक गाव वसलेले आहे. या गावाचे एक वैशिष्ट्य आहे. दर वर्षी 21 जून रोजी (वसंतसंपाताच्या दिवशी), बरोबर दुपारी, सूर्य या गावाच्या नेमका डोक्यावर येतो. म्हणजेच, जमिनीत सरळ उभ्या रोवलेल्या एखाद्या काठीची सावली तेथे त्या वेळी पडत नाही. या गोष्टीचा उपयोग करून पृथ्वीचा परीघ काढता येईल, हे एरॅटोस्थेनिसला सुचले. आस्वानच्या उत्तरेस साधारण 500 मैलांवर ॲलेक्झांड्रिया नावाचे शहर आहे. 21 जून रोजी सूर्य जरी आस्वान येथे डोक्यावर येत असला तरी ॲलेक्झांड्रियाला तो तसा येत नाही, हे या शास्त्रज्ञाच्या लक्षात आले. ॲलेक्झांड्रियाला जमिनीत रोवलेल्या उभ्या खांबाची सावली या दिवशी पडते, हे त्याने पाहिले. अशा वेळी, खांब व त्या खांबाच्या टोकाला चाटून जाणारा, व सावलीच्या टोकाशी पोचणारा, सूर्यकिरण यामध्ये 7.2° चा कोन होत होता. (आस्वानला, अर्थातच, हा कोन शून्य होता.) आकृती 5 मध्ये ही स्थिती मोठी करून दाखविली आहे.




आकृती 3

पृथ्वीवर पोचणारे सूर्याचे किरण जवळजवळ समांतर असतात. (त्यांत केवळ अर्ध्या अंशाचा कोन असतो.) याचे कारण सूर्य व पृथ्वीमध्ये प्रचंड अंतर आहे. म्हणून, आकृती 3 मध्ये, PM //AC.

म्हणजेच, $m\angle MPB = m\angle BCA$ (कारण ते आंतरव्युत्क्रम कोन आहेत) ज्या अर्थी $m\angle MPB = 7.2°$ (प्रोजमापावरून) $\therefore m\angle BCA = 7.2°$

आस्वान व ॲलेक्झांड्रिया या गावांतील अंतर 493 मैल आहे, हे त्या काळी माहीत होते.

$$\frac{\text{पृथ्वीवरील AB हे अंतर}}{m\angle BCA} = \frac{\text{पृथ्वीचा परीघ}}{360°}$$

$$\frac{493}{7.2} = \frac{\text{पृथ्वीचा परीघ}}{360°}$$

$$\text{पृथ्वीचा परीघ} = \frac{493 \times 360}{7.2}$$

$$= 493 \times 50 \text{ मैल}$$

$$= 24.650 \text{ मैल.}$$

एरॅटोस्थेनिसने नंतर हा आकडा 24,859 मैल असा दुरुस्त केला. त्याची कारणे मात्र आपल्याला आज माहीत नाहीत. आजच्या प्रगत विज्ञानाप्रमाणे पृथ्वीचा विषुववृत्तावरील परीघ सुमारे 24,900 मैल सांगितला जातो. 2000 वर्षांपूर्वी एरॅटोस्थेनिसने वर्तविलेला पृथ्वीच्या परीघाचा अंदाज तसा फार चुकला नव्हता, ही गोष्ट आजही आपल्याला स्तिमित करून टाकते.

## 7. कागदाची कापाकापी करून

मुलांना खूप छंद असतात. देशोदेशीची तिकिटे, नाणी, रंगीबेरंगी चित्रे, काडेपेट्या, स्टिकर्स यापैकी एकाने तरी मुलाचा खजिना भरलेला असतोच. काही मुलांना, विशेषतः लहानपणी, कागद कापून त्यातून निरनिराळ्या प्राणी-पक्ष्यांचे,

झाडांचे, डोंगरांचे आकार करायला आवडते. कागदाचे हे तुकडे एखाद्या पुठ्ठयावर चिकटवून व त्यांना रंग देऊन सुंदर देखावाही तयार करता येतो. या सगळ्या नादापायी घरात सर्वत्र कागदाचे कपटे पडतात आणि कचरा होतो. मोठ्या माणसांची बोलणी मग आलीच. परंतु, मुलांतील कलात्मक गुण व सौंदर्यदृष्टी वाढविणाऱ्या या छंदाबरोबरच, कागदाच्या कापाकापीतून, त्यांना भूमितीतील काही महत्त्वाच्या गोष्टी शिकविता येतात, हे फारच थोड्या जणांना माहीत असते. वरवर निरर्थक वाटणाऱ्या या खेळातून भूमितीतील काही प्रमेये सहजपणे समजू शकतात. यासाठी काही उदाहरणे घेऊ.

(1) समद्विभुज त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ : प्राचीन काळात इजिप्तमधील लोकांना आपल्यासारखे प्रगत ज्ञान नव्हते. तरीही, केवळ कल्पकतेमुळे, निरनिराळ्या आकृत्यांची क्षेत्रफळे काढण्याच्या पद्धती त्यांनी शोधून काढल्या. उदाहरणार्थ, समद्विभुज त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ काढण्याची त्यांची पद्धत पहा. ही पद्धत नवनवीन मार्ग अवलंबिण्याच्या त्यांच्या प्रवृत्तीची साक्ष देते; आजही आपल्याला ती लक्षणीय वाटते.

$\triangle ABC$ हा एक समद्विभुज त्रिकोण आहे, $AB \cong AC$. AM हा A पासून BC वर काढलेला लंब आहे. प्रथम हा त्रिकोण कात्रीने कापून घ्या (आकृती 1 पहा). यानंतर AM वरून कापून त्याचे दोन तुकडे करा. हे दोन्ही तुकडे काटकोन त्रिकोण असतील (आकृती 2 पहा). त्यांना आपण 1 व 2 अशी नावे देऊ. शेवटी, 1 त्रिकोण उलटा करा व 2 त्रिकोणाच्या कडेवर चिकटवून टाका (आकृती 3 पहा). तुम्हाला PQRS हा आयत मिळेल.

$\triangle ABC$ चे क्षेत्रफळ = PQRS आयताचे क्षेत्रफळ
$= l(PQ) \times l(QR)$

आता, $l(PQ) = l(BM) = 1/2\,l(BC)$, आणि $l(QR) = l(AM)$.

$\therefore \triangle ABC$ चे क्षेत्रफळ $= \frac{1}{2}\, l(BC) \times l(AM)$

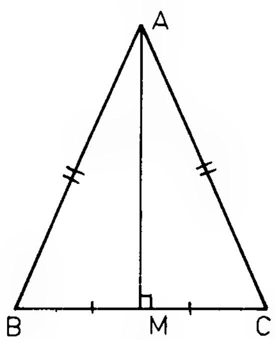
$= \frac{1}{2}$ पाया $\times$ उंची

(हे सूत्र कोणतेही गणित न करता आलेले आहे.)

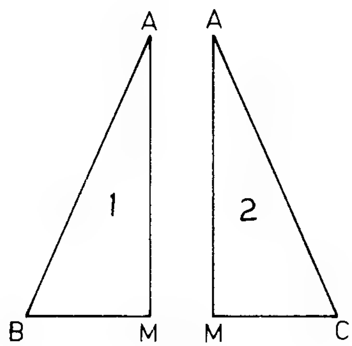
(2) पायथॅगोरसच्या प्रमेयाचे प्रात्यक्षिक : शाळेत भूमिती शिकत असता आपण अनेक प्रमेये शिकतो. यांतील काही प्रमेये बरोबर आहेत (सत्य आहेत), हे आपण कागद कापून व त्यांचे तुकडे विशिष्ट पद्धतीने चिकटवून पाहू शकतो. उदाहरणार्थ, पायथॅगोरसचे प्रमेय घ्या. कागद कापून त्याचे तथ्य पाहता येते; कोणतीही गुंतागुंतीची भूमितीय सूत्रे किंवा प्रमेये त्यासाठी लागत नाहीत.

एखाद्या काटकोन त्रिकोणामध्ये, कर्ण जर c लांबीचा असेल व दुसऱ्या दोन बाजू जर a व b लांबीच्या असतील तर $c^2 = a^2 + b^2$, हे पायथॅगोरसचे प्रमेय.... (आ. 4 पहा).

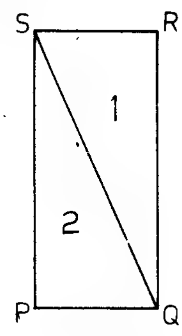
या प्रमेयाचे प्रात्यक्षिक पाहण्यासाठी ABCD हा एक चौरस आकाराचा कागदाचा तुकडा घ्या. या चौरसाची प्रत्येक बाजू c आहे, असे समजा. प्रथम AB हा व्यास घेऊन एक अर्धवर्तुळ काढा. नंतर A हे केंद्र घेऊन व AB पेक्षा (म्हणजे c पेक्षा) लहान अशी कोणतीही त्रिज्या घेऊन आधीच्या अर्धवर्तुळाला P या ठिकाणी छेद देणारा कंस (arc) काढा. P हा बिंदू A व B ला जोडा (आकृती 5 पहा). $\angle APB$ हा काटकोन आहे, कारण तो AB व्यासाने अर्धवर्तुळावर केलेला कोन आहे. $l(AP) = a$ व $l(BP) = b$, असे समजू. आपण a हा b पेक्षा जास्त निवडला आहे $(a > b)$. हीच कृती BC, CD व



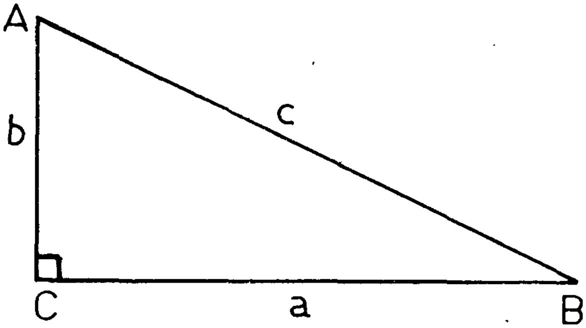
आकृती 1



आकृती 2



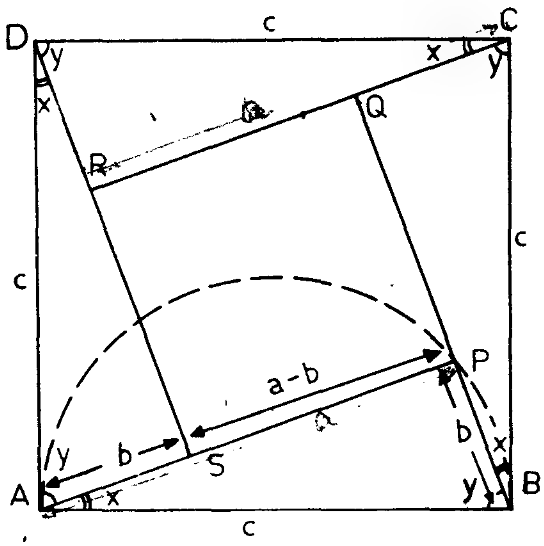
आकृती 3




आकृती 4

DA व्यास घेऊन करा. प्रत्येक वेळी a एवढीच त्रिज्या घेऊन कंस काढा. छेदबिंदूंना Q, R व S ही नावे द्या. Q बिंदू B व C ला, R बिंदू C व D ला, व S बिंदू D व A ला जोडा. याप्रमाणे केल्यावर आकृती 5 सारखी आकृती तयार होईल. येथे, BQ रेषा BP शी, CR रेषा CQ शी व DS रेषा DR शी जुळते, हे तुमच्या लक्षात येईल. तसेच, S बिंदू AP वर पडेल. याचे साधे कारण म्हणजे, $m\angle X + m\angle Y = 90^\circ$ (आकृती 5 पहा)., व हाच कोन A, B, C, D या बिंदूंशी, ABCD चौरस असल्यामुळे, झालेला आहे.

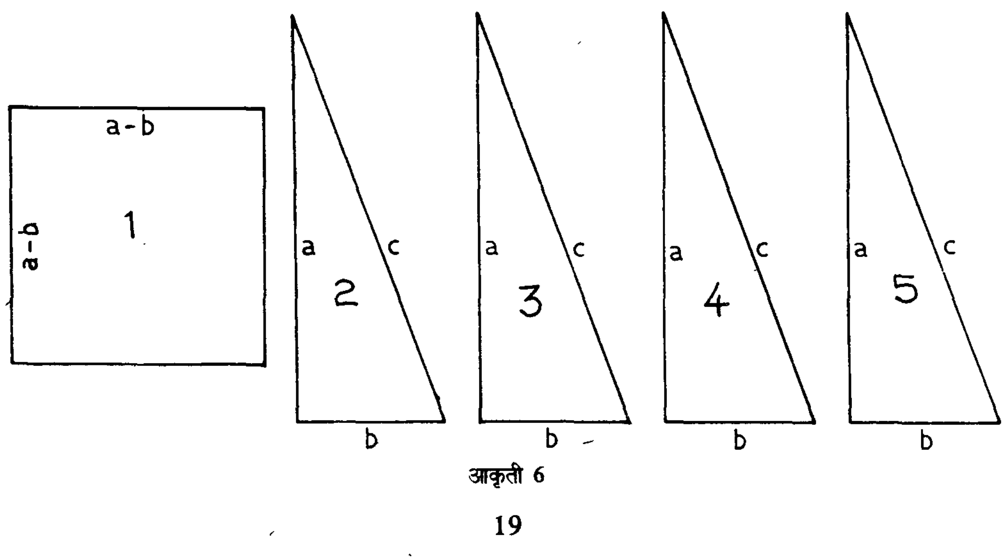
तसेच, $\triangle ABP \cong \triangle BQC \cong \triangle CRD \cong \triangle DSA$.
(जेव्हा दोन काटकोन त्रिकोणांमधील कर्ण एकरूप असतात व संगत भुजांची एक जोडी एकरूप असते तेव्हा ते त्रिकोण एकरूप असतात). किंबहुना हे चारही त्रिकोण म्हणजे, त्यांतील एकच त्रिकोण 90 अंशातून फिरविल्यावर, क्रमाने येणाऱ्या अवस्था आहेत.



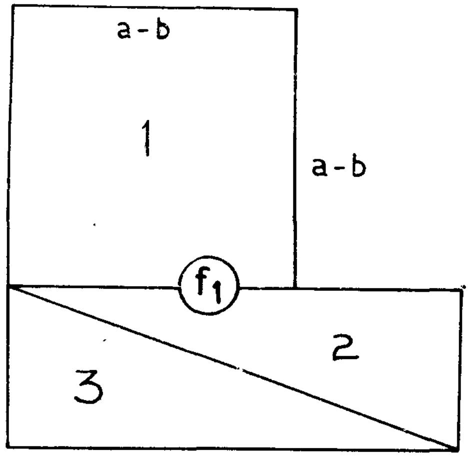

आकृती 5

आता ही आकृती AP, BQ, CR व DS वरून कापा. तुम्हाला 5 तुकडे मिळतील (एक चौरस व चार एकरूप काटकोन त्रिकोण). हे तुकडे आकृती 6 मध्ये दाखविले आहेत. चौरसाची प्रत्येक बाजू a – b असेल व प्रत्येक त्रिकोणाच्या बाजू a, b व c (कर्ण) असतील.

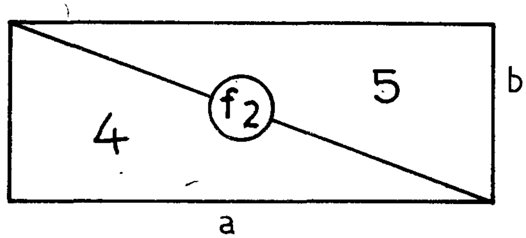
यातील 1, 2 व 3 तुकडे आकृती 7 प्रमाणे एकमेकांना जोडा. या तुकड्याला आपण $f_1$ म्हणू. तसेच, 4 व 5 हे तुकडे आकृती 8 प्रमाणे जोडा. या तुकड्याला आपण $f_2$ म्हणू.



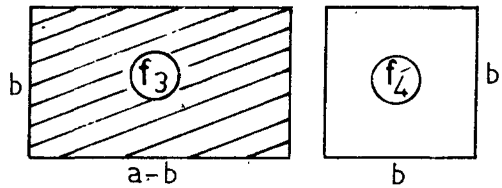

आकृती 6




आकृती 7




आकृती 8

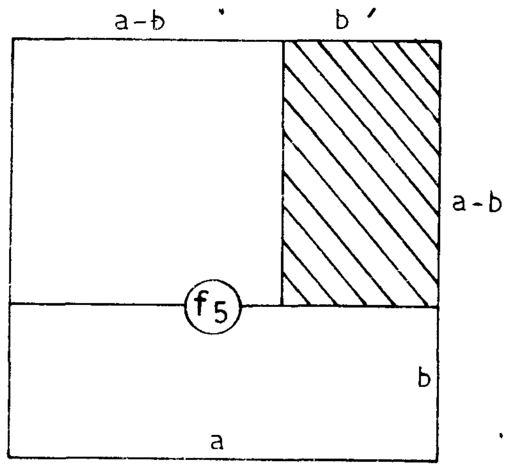



आकृती 9

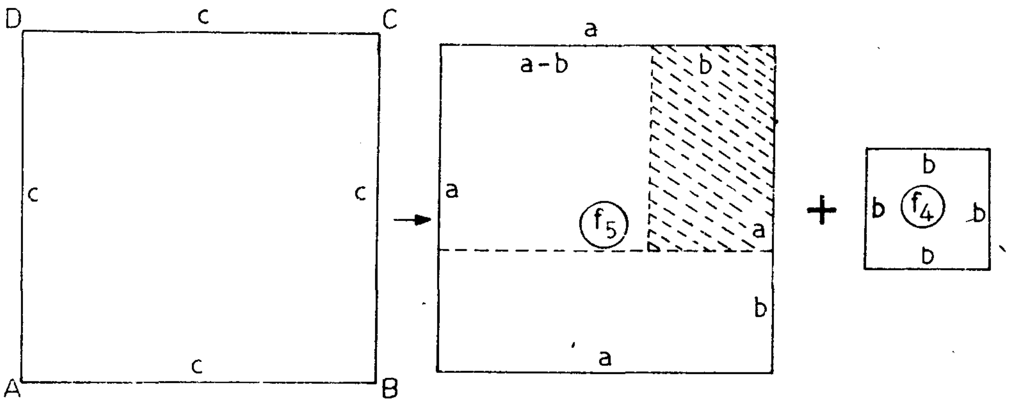
आता, $f_2$ तुकड्यातून $(a-b)$ लांबीचा व b रुंदीचा आयत कापून घ्या. उरलेला तुकडा b लांबीचा चौरस असेल. आपण या आयताला (आकृती 9 मध्ये रेखांकित दाखविला आहे) $f_3$ म्हणू व चौरसाला $f_4$ म्हणू.

आता $f_1$ व $f_3$ हे तुकडे घेऊन आकृती 10 मध्ये दाखविल्याप्रमाणे एकमेकांना जोडा. a लांबीचा एक चौरस तयार होईल. याला आपण $f_5$ म्हणू.

याप्रमाणे, $(c \times c)$ चा चौरस घेऊन आपण त्यापासून $(a \times a)$ व $(b \times b)$ असे दोन चौरस मिळविले (आकृती 11 पहा). हे करताना कोणताही तुकडा उरला नाही किंवा कमी पडला नाही. म्हणूनच,




आकृती 10




आकृती 11

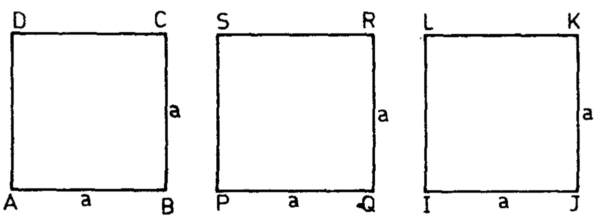
c लांबीच्या चौरसाचे क्षेत्रफळ = a लांबीच्या चौरसाचे क्षेत्रफळ + b लांबीच्या चौरसाचे क्षेत्रफळ.

किंवा, $c^2=a^2=b^2$.

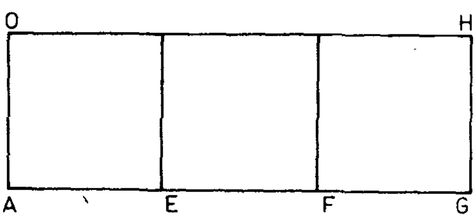
हेच पायथॅगोरसच्या प्रमेयाचे सूत्र आहे. हे सूत्र कोणत्याही काटकोन त्रिकोणाबाबत खरे आहे, हे उघड आहे.

(3) तीन सारखे चौरस घेऊन त्यांपासून एकच मोठा चौरस बनविणे :

अनेक कारखान्यांतून किंवा गुदामांतून कागदांचे, कापडांचे लहान लहान तुकडे उरतात. हे तुकडे कचरा म्हणून फेकून देतात. या तुकड्यांचा काही उपयोग करता येईल का ? अर्थात, हे करण्याची पद्धत सोपी पाहिजे आणि त्याला फार वेळ व श्रम लागता कामा नयेत. उदाहरणार्थ, सारख्या आकाराचे 3 लहान चौरस तुकडे घेऊन (किंवा कापून घेऊन) त्यांच्यापासून एक मोठा चौरस तुकडा बनविता येईल का ? हा मोठा तुकडा फलक किंवा जाहिरातीसाठी आपण वापरू शकू. हे काम कमीत-कमी कापाकापी व जोडाजोडी करून करायचे आहे. वास्तविक हा एक विशेष प्रकारचा अभ्यासविषयच आहे. आणि, आश्चर्य म्हणजे, गणिती नसणाऱ्या माणसांनीसुद्धा या विषयाला योगदान केले आहे. या अभ्यासाला भूमितीय विच्छेदन (geometric dissection) असे म्हणतात. पर्शियामध्ये 10 व्या शतकात अबुल वेफा नावाचा एक प्रसिद्ध खगोलशास्त्रज्ञ होऊन गेला. त्याने या विषयावर पहिला पद्धतशीर ग्रंथ लिहिला. तीन सारख्या चौरसांपासून एक चौरस कसा मिळवायचा, याची रीत त्याने या ग्रंथात दिली आहे. परंतु ती



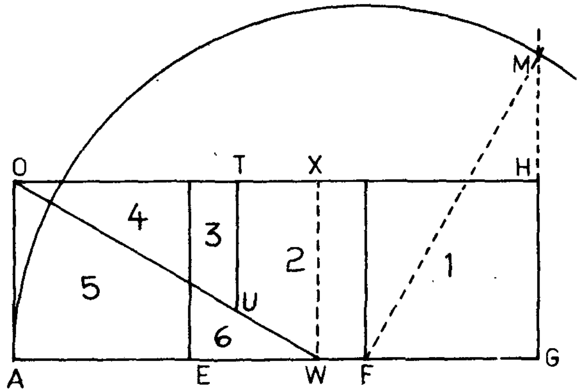

आकृती 12




आकृती 13

थोडी किचकट आहे. या पद्धतीत, शेवटच्या टप्प्यावर 9 तुकडे मिळतात. हे 9 तुकडे जोडून एक मोठा चौरस तयार करता येतो. किचकट असल्यामुळे आपण त्या पद्धतीचा येथे विचार करणार नाही. हे करण्याची, यापेक्षा, एक सोपी पद्धत हेन्री डड्ने या इंग्लिश गृहस्थाने शोधून काढली. त्याच्या पद्धतीत शेवटी फक्त तीनच तुकडे जोडावे लागतात. आपण ती पद्धत पाहू या.

समजा, ABCD, PQRS व IJKL हे तीन सारखे चौरस आहेत (आकृती 12 पहा). हे तीन तुकडे आकृती 13 प्रमाणे एकमेकांना चिकटवून घ्या. आता F हे केंद्र व FA ही त्रिज्या घेऊन एक वर्तुळ काढा. हे वर्तुळ, GH वाढविल्यानंतर, M या ठिकाणी छेदेल (आकृती 14 पहा). l(FA)=l(FM).




आकृती 14

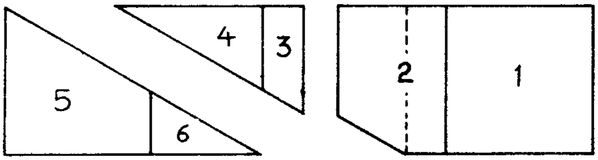
आता W हा बिंदू AG वर व T हा बिंदू OH वर असा घ्या की, l(GM)=l(AW)=l(HT). या ठिकाणी l(AW)<l(AF) आहे, कारण l(GM) <l(FM)......($\because$ $\triangle$FGM हा काटकोन त्रिकोण आहे व अशा त्रिकोणात कर्ण हा भुजेपेक्षा मोठा असतो.)

O व W जोडा, आणि T पासून TU ही रेषा OA ला समांतर काढा (TU || OA).

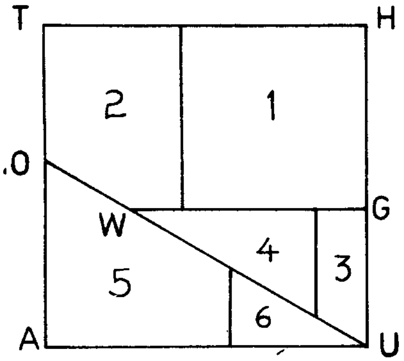
आता OW व TU या रेषांवरून कापा. तुम्हाला तीन तुकडे मिळतील (आकृती 15 पहा). हे तीन तुकडे आकृती 15 प्रमाणे चिकटविले, की एक मोठा तुकडा मिळेल.

हा तुकडा चौरस आहे, हे आता आपण सिद्ध करू.

**सिध्दता**: आकृती 16 व 14 वरुन AUHT हा आयत आहे, हे उघड आहे. आकृती 14 मध्ये WX ही UT ला समांतर रेषा काढा.




आकृती 15




आकृती 16

FGM या काटकोन त्रिकोणात (आकृती 14 पहा),

$[l(FM)]^2=[l(FG)]^2+[l(GM)]^2$.....(पायथॅगोरस प्रमेय)

$\therefore [l(FA)]^2=[l(FG)]^2+[l(GM)]^2$.....( $\because$ रचनेवरून $l(FA)=l(FM)$).

$\therefore (2a)^2=a^2+[l(GM)]^2$

$\therefore 3a^2=[l(GM)]^2$

$\therefore l(GM)=a\sqrt{3}$

आता, $\triangle OUT$ व $\triangle OWX$ हे त्रिकोण समरूप आहेत......( $\because WX \parallel UT$)

म्हणून त्यांच्या संगत भुजांची गुणोत्तरे समान आहेत.

$$\therefore \frac{l(UT)}{l(WX)}=\frac{l(OT)}{l(OX)}$$

$$\therefore \frac{l(UT)}{a}=\frac{l(OH)-l(HT)}{l(AW)}=\frac{3a-a\sqrt{3}}{a\sqrt{3}}$$

$$\therefore l(UT)=\frac{3a-a\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

$$=\frac{\sqrt{3}(a\sqrt{3}-a)}{\sqrt{3}}$$

$$=a\sqrt{3}-a$$

आकृती 14मधील UT ही रेषा म्हणजेच आकृती 16 मधील OT रेषा आहे. म्हणून आकृती 16 मध्ये, $l(OT)=a\sqrt{3}-a$.

$\therefore l(AT)=l(AO)+l(OT)$

$=a+(a\sqrt{3}-a)=a\sqrt{3}$

तसेच, आकृती 16 मधील AU या रेषेची लांबी आकृती 14 मधील AW रेषेएवढी आहे. म्हणजे, $l(AU)=l(AW)$. परंतु, आकृती 14 मध्ये $l(AW)=a\sqrt{3}$.......(आधी दाखविल्याप्रमाणे)

$\therefore$ आकृती 16 मध्ये, $l(AU)=a\sqrt{3}$

म्हणून, आकृती 16 मधील AUHT या आयताच्या शेजारील दोन बाजू, AU व AT या, समान लांबीच्या, म्हणजे $a\sqrt{3}$ एवढ्या, आहेत. याचाच अर्थ AUHT हा चौरस आहे व त्याचे क्षेत्रफळ $a\sqrt{3}\times a\sqrt{3}=3a^2$ एवढे आहे.

# 8. वजनासाठी अडलेला शेतकरी

शाळेत गणित शिकताना अनेक मुलांना म.सा.वि. (महत्तम साधारण विभाजक) ही काय चीज आहे, हे सहज कळत नाही. उदाहरणार्थ, 8, 12 व 24 या संख्यांचा म.सा.वि. काढण्यास दिला की, मुलांकडून अनेक वेळा 24 हे उत्तर येते. दिलेल्या आकड्यांतील सर्वात मोठा आकडा, म्हणून हे उत्तर दिलेले असते. या ठिकाणी, म.सा.वि. म्हणजे सर्वाधिक संख्या, असा घोटाळा झालेला असतो. मुलांची अशी समजूत असते, की दिलेल्या संख्यांतून एका संख्येची निवड केली की, म.सा.वि. येतो. दिलेल्या संख्यांच्या पोटात लपलेले अवयव (म्हणजे पोटसंख्या), केवळ त्या संख्या पाहून, कधीच दिसत नाहीत. कधी कधी मुलांच्या मनात म.सा.वि. व ल.सा.वि. या संकल्पनांचे मिश्रण होऊन गोंधळ झालेला असतो. याला उपाय काय ? नेहमीच्या व्यवहारातील एखादी घटना घेऊन (गोष्टीच्या रूपाने) तिचा संबंध जर म.सा.वि. शी जोडला तर कदाचित काही उपयोग होईल का ? बघू या प्रयत्न करून एखादा प्रसंग घेऊन नकळतच आपण म.सा.वि. पर्यन्त कसे

येऊन पोचतो, ते पाहू या.

एका गावात एक शेतकरी राहत होता. शेतात पिकणारा थोडा तांदूळ, गहू व ज्वारी तो घरात साठवून ठेवत असे. एकदा शेजारच्या गावातील त्याचा मित्र, एक छोटा दुकानदार, त्याच्याकडे आला. त्याला 10 किलो तांदूळ, 20 किलो गहू व 30 किलो ज्वारी त्या शेतकऱ्याकडून खरेदी करायची होती. परंतु अडचण अशी होती, की नेमक्या याचवेळी शेतकऱ्याजवळ, तराजू असूनही, वजने मात्र नव्हती. (त्याने आपल्या पुतण्याला ती काही दिवसांपुरती दिली होती.) आता, वजनाशिवाय तराजू म्हणजे शाईशिवाय लेखणी किंवा दोऱ्याशिवाय शिवणाचे यंत्र. त्याचा उपयोग काय ? म्हणून, शेतकरी शेजारच्या वाण्याच्या दुकानात वजने मागायला गेला. ती वेळ धंद्याची होती. दुकानात गिऱ्हाईकांची खूप गर्दी होती आणि वाण्याला शेतकऱ्याची अडचण ऐकत बसायला फालतू वेळ नव्हता. त्याने फक्त आपल्याजवळची 1, 2, 5, 10, 20, 50 आणि 100 किलोग्रामची वजने शेतकऱ्यापुढे ठेवली व त्याला त्यांतील कुठलेही एक वजन घेऊन जा म्हणून सांगितले. आता आला प्रश्न? कुठले वजन निवडायचे ? 10, 20 व 30 किलोग्राम धान्य वजन करायचे म्हणजे 50 व 100 किलोग्राम वजनांचा काहीच उपयोग नाही. परंतु 20 किलोग्रामच्या वजनाचे काय ? अर्थात, 10 किलोग्राम तांदळाचे वजन करायला हे वजन कुचकामी असल्यामुळे, ते घेण्यातही काही अर्थ नाही. आता उरली 10, 5, 2 व 1 किलोग्रामची वजने. या सर्व संख्या म्हणजे 10, 20 व 30 चे समान अवयव आहेत, ही गोष्ट तुमच्या लक्षात आली असेल. म्हणून यांतील कोणत्याही एका वजनाने शेतकऱ्याचे काम भागले असते. परंतु, तरीही, लहान वजन नेले म्हणजे अनेक वेळा वजन करण्याची कटकट वाढली असती. (उदा., 1 किलोग्राम वजनाने 10 किलो तांदूळ वजन करायला दहा वेळा वजन करावे लागले असते.) हा त्रास कमी करायचा म्हणजे उरलेल्या वजनांतील सर्वात मोठे वजन वापरायचे. साहजिकच, शेतकऱ्याने 10 किलोग्रामचे वजन पसंत केले. हे वजन म्हणजे, अर्थातच, 10, 20 व 30 चा म.सा.वि. होता. थोडक्यात, जी धान्ये मापायची आहेत त्यांच्या वजनांच्या म.सा.वि. शी येऊन शेतकऱ्याचा प्रश्न सुटला होता.

दिलेल्या संख्यांचा म.सा.वि. काढण्यासाठी अनेक पद्धती आहेत. त्यात एक भागाकाराची पद्धत आहे. या पद्धतीला युक्लीडची अल्गोरिथम् पद्धत असेही म्हणतात. पाचव्या शतकात होऊन गेलेल्या आर्यभट नावाच्या विख्यात भारतीय गणितज्ञाने ही पद्धत वापरली होती. दोन संख्या घेऊन आपल्याला ही पद्धत समजावून घेता येईल :

समजा, 105 व 1485 यांचा म.सा.वि. काढायचा आहे. यांतील मोठ्या संख्येला (विभाज्य) लहान संख्येने (विभाजक) भागा. जी बाकी उरेल तिने विभाजकाला भागा, (पहिल्याच भागाकारात जर बाकी शून्य आली तर विभाजक (म्हणजे, दिलेली लहान संख्या) म.सा.वि. असतो, हे उघड आहे) व ही क्रिया सतत करीत रहा. ज्या भागाकारात बाकी शून्य येईल त्या भागाकारातील विभाजक, दिलेल्या मूळच्या संख्यांचा, म.सा.वि. असतो. आपल्या उदाहरणात 105 व 1485 या संख्या आहेत. म्हणून

$$\begin{array}{r} 105\,)1485(\,14 \\ -105 \\ \hline 435 \\ -420 \\ \hline 15 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 15\,)105(\,7 \\ -105 \\ \hline 000 \end{array}$$

म्हणून, 15 हा 105 व 1485 यांचा म.सा.वि. आहे.

या पद्धतीने म.सा.वि. का येतो, ते आता पाहू.

समजा, A व B या दोन संख्या आहेत व A<B. येथे A ने B ला भागले पाहिजे. पद्धत अशी आहे :

$$\begin{array}{r} A)B(n_1 \\ -n_1A \\ \hline P \end{array} \quad \begin{array}{r} P)A\ (n_2 \\ -n_2P \\ \hline Q \end{array} \quad \begin{array}{r} Q)P(n_3 \\ -n_3Q \\ \hline R \end{array} \quad \begin{array}{r} R)Q(n_4 \\ -n_4R \\ \hline 00 \end{array}$$

$$(P=B-n_1A)(Q=A-n_2P)(R=P-n_3Q)(Q=n_4R)$$

(येथे $A, B, n_1, n_2, n_3, n_4, P, Q, R$ हे सर्व धन पूर्णांक आहेत.)

येथील पद्धतीप्रमाणे R हा A व B चा म.सा.वि. आहे.
परंतु हे सिद्ध कसे करायचे ?

**सिध्दता**: समजा, वरील A व B या संख्यांचा म.सा.वि. H आहे. A व B प्रमाणे H हाही धन पूर्णांक आहे. आपण $H=R$ हे दाखवू शकतो.

प्रथम आपण $H \leq R$ हे सिद्ध करू व नंतर $H \geq R$ हे सिद्ध करू.

या दोन सिद्धतांचा अर्थ $H=R$ असा होईल.

(1) $H \leq R$ हे दाखवायचे आहे.

H हा A व B चा म.सा.वि. आहे, म्हणून तो A व B चा समान अवयवही आहे.

समजा, $A = a \times H$ व $B = b \times H$.

$\therefore P = B - n_1A = bH - n_1aH = H(b - n_1a)$

तसेच, $Q = A - n_2P$

$= aH - n_2H(b - n_1a) = H[a - n_2(b - n_1a)]$

तसेच, $R = P - n_3Q = H(b - n_1a) - n_3H[a - n_2(b - n_1a)]$

$= H(b - n_1a) - H[n_3a - n_3n_2(b - n_1a)]$

$= H[(b - n_1a) - n_3a + n_3n_2(b - n_1a)]$

येथे R व H हे धन पूर्णांक आहेत. म्हणून कंसही धन पूर्णांक आहे. याचाच अर्थ, H हा R चा अवयव आहे.

$\therefore H \leq R$

(2) आता $H \geq R$ हे दाखवायचे आहे.

$Q = n_4R$........ (शेवटच्या चौथ्या भागाकारावरून)

तसेच, $P = n_3Q + R$........ (तिसऱ्या भागाकारावरून)

$= n_3n_4R + R$

$= R(n_3n_4 + 1)$

आता,

$A = n_2P + Q$........ (दुसऱ्या भागाकारावरून)

$= n_2R(n_3n_4 + 1) + n_4R$

$\therefore A = R[n_2(n_3n_4 + 1) + n_4]$........... (1)

तसेच, $B = n_1A + P$.......... (पहिल्या भागाकारावरून)

$= n_1R[n_2(n_3n_4 + 1) + n_4] + R(n_3n_4 + 1)$

$= R[n_1n_2(n_3n_4 + 1) + n_1n_4] + R(n_3n_4 + 1)$

$\therefore B = R[n_1n_2n_3n_4 + n_1n_2 + n_1n_4 + n_3n_4 + 1]$........(2)

सूत्र (1) व (2) वरून असे दिसते, की R हा A व B चा साधारण अवयव आहे. परंतु H हा जर A व B चा म.सा.वि. असेल, तर R हा H पेक्षा कमी किंवा फार तर H एवढाच असेल. म्हणून, $R \leq H$ किंवा $H \geq R$.

आपण असे सिद्ध केले आहे, की $H \leq R$ व त्याच वेळी $H \geq R$. या दोन गोष्टींचा एकत्र अर्थ $H = R$ असा होतो.

म्हणून R हा A व B चा म.सा.वि. आहे.

# 9. वडीलधाऱ्या अंकाची करामत

9 हा सर्वात मोठा (वडीलधारी) अंक आहे. तो सर्वात मोठा एक-अंकी पूर्णांक आहे. 9 ही संख्या अनेक दृष्टींनी वैशिष्ट्यपूर्ण आहे. या संख्येच्या काय करामती आहेत, ते पाहणे फार मनोरंजक ठरेल.

(अ) छेदस्थानी 9 किंवा 99 असताना जे अपूर्णांक होतात, त्यांची गंमत पहा.

1/9=0.11111.....
2/9=0.22222.....
3/9=0.33333.....
4/9=0.44444.....
5/9=0.55555.....
6/9=0.66666.....
7/9=0.77777.....
8/9=0.88888.....
11/99=0.11111.....
12/99=0.121212.....
13/99=0.131313.....

इत्यादि.

या अपूर्णांकांची रूपे किती गमतीदार आहेत, हे तुम्हाला सहज कळून येईल.

(ब) 9 ने एखाद्या संख्येला भाग दिल्यानंतर बाकी किती उरेल ? समजा, 235 ला 9 ने भागले तर बाकी किती उरेल ? किचकट भागाकार न करता हे सांगता येईल का ? हो, सांगता येईल. दिलेल्या संख्येला एक-अंकी रूप दिले की झाले ! हा अंक म्हणजेच बाकी असेल. 235 च्या बाबतीत, 2+3+5=10 व 1+0=1. म्हणून 235 ला 9 ने भागले, की बाकी 1 उरेल. अशीच काही उदाहरणे पुढे दिली आहेत. प्रत्यक्ष भागाकार करून तुम्ही ती पडताळून पाहू शकता.

12÷9: येथे 1+2=3, म्हणून बाकी 3.

201÷9: येथे 2+0+1=3, म्हणून बाकी 3.

1355÷9: येथे 1+3+5+5=14. परंतु 14 ही 9 पेक्षा जास्त असल्यामुळे ती बाकी असणार नाही. म्हणून 1+4=5 बाकी असेल.

32461÷9: येथे बाकी 7 असेल. कारण, 3+2+4+6+1=16 व 1+6=7.

(क) 9 चे कोडे : खाली दिलेले कोडे तुम्ही तुमच्या मित्रांना घाला, ते आश्चर्यचकित झाल्याशिवाय राहणार नाहीत. युक्ती अगदी साधी आहे.

(1) प्रथम तुमच्या मित्राला मनात कोणतीही एक, नऊपेक्षा जास्त, नैसर्गिक संख्या (म्हणजे धन पूर्णांक संख्या) धरायला सांगा. समजा, त्याने 123 ही संख्या धरली. अर्थात हे तुम्हाला माहीत नाही.

(2) यानंतर त्या संख्येतील अंकांची बेरीज संख्येमधून वजा करायला त्याला सांगा. $123-(1+2+3)=117$. अर्थात, ही संख्याही तुम्हाला माहीत नसणार.

(3) आता, आलेल्या संख्येतील कोणताही एक अंक त्याला मनातल्या मनात पुसायला सांगा व किती संख्या उरली, असे त्याला विचारा. समजा, 117 मधील 7 हा अंक त्याने पुसला तर उरलेली 11 ही संख्या तो तुम्हाला सांगेल. या संख्येवरून, पुसलेला अंक तुम्ही ओळखू शकाल. प्रथम त्याने सांगितलेल्या संख्येतील अंकांची बेरीज करा. त्याने 11 ही संख्या सांगितली, म्हणून $1+1=2$. यानंतर ही संख्या नऊतून वजा करा. म्हणजे, $9-2=7$. याचा अर्थ, तुमच्या मित्राने 7 अंक पुसला असला पाहिजे.

आणखी एक उदाहरण घेऊ या : 239.

(1) $2+3+9=14$

(2) $239-14=225$

(3) समजा 225 मधील 2 हा अंक पुसला, तर 25 ही संख्या उरेल.

कोड्याचे उत्तर : $25 \rightarrow 2+5=7$, $9-7=2$. म्हणून 2 हा अंक पुसला होता. येथे फक्त एकच अपवाद आहे. तुमच्या मित्राने तुम्हाला सांगितलेल्या संख्येतील अंकांची बेरीज जर 9 आली तर त्याने 9 किंवा शून्य यापैकी एक अंक पुसला असेल.

उदा., $6789-(6+7+8+9)=6759$.

समजा, 9 पुसला तर उरलेली संख्या 675. तुम्ही या संख्येतील अंकांची बेरीज केली : $6+7+5=18$ व $1+8=9$. अशा वेळी पुसलेला अंक शून्य असतो किंवा 9 असतो. 112 संख्या घेऊन करून पहा.

आता, असे का होते ते पाहू या.

(1) ज्या वेळी आपण कोणत्याही संख्येतील अंकांची बेरीज त्या संख्येतून वजा करतो त्यावेळी आपल्याला 9 चे विभाज्य असलेली संख्या मिळते.

उदा., ab ही संख्या म्हणजे, $10a+b$ व

$(10a+b)-(a+b)=9a$.

किंवा, abc अशी संख्या म्हणजे, $100a+10b+c$.

व $(100a+10b+c)-(a+b+c)$

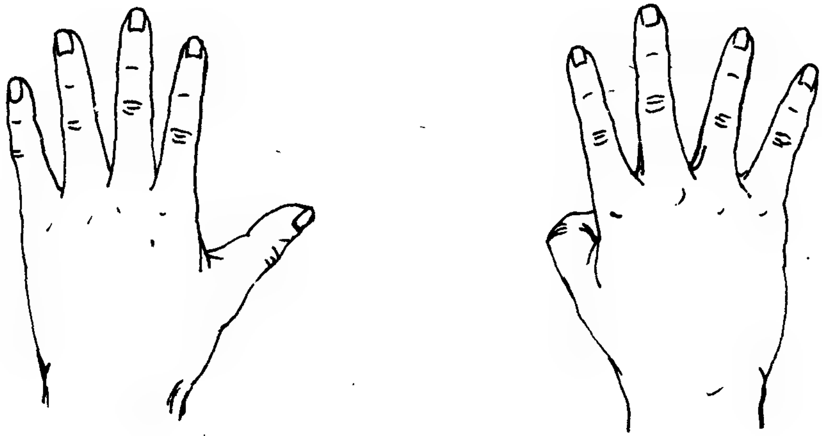
$=(99a+9b)$

या ठिकाणी, $9a$ किंवा $(99a+9b)$ या दोन्ही संख्यांना 9 ने भाग जातो. म्हणजेच या संख्या 9 ची विभाज्ये आहेत.

(2) 9 चे कोणतेही विभाज्य (थोडक्यात 9 ची कोणतीही पट) असलेली संख्या घेतली व त्यातील अंकांची बेरीज करून एक-अंकी संख्या काढली तर ती संख्या नेहमीच 9 येते. उदा., 18 हे 9 चे विभाज्य आहे व $1+8=9$. तसेच, 99 हे 9 चे विभाज्य आहे व $9+9=18$ व $1+8=9$. म्हणून, तुमच्या मित्राला मिळालेली संख्या 9 चे विभाज्य असणार व त्यातील अंकांची बेरीज नऊच येणार. (18, 27, अशा संख्या आल्यास त्यातील अंकांची बेरीज करून शेवटी एक-अंकी संख्या काढायची आहे व ती 9 च येते).

(3) तुमच्या मित्राने 9 च्या विभाज्यातील एक अंक पुसून, तुम्हाला उरलेली संख्या सांगितलेली असते. अर्थात, या संख्येतील अंकांची बेरीज 9 पेक्षा पुसलेल्या अंकाने कमी असते. म्हणून आपण त्या संख्येतील अंकांची बेरीज करून व ती 9 तून वजा करून पुसलेला अंक सांगू शकतो.

(ड) नऊचा गुणाकार बोटांवर : 9 चा गुणाकार नुसत्या बोटांनी करता येतो, यावर कदाचित तुमचा विश्वास बसणार नाही. परंतु ते खरे आहे. समजा 6 ला 9 ने गुणायचे आहे. प्रथम हातांचे दोन्ही पंजे, पाचही बोटे ताठ उघडून, समोर धरा. हातांचे तळवे समोरच्या भिंतीकडे करा. आता डावीकडून 6 बोटे मोजा. सहावे बोट दुमडा (आकृती 1 पहा). यावेळी, दुमडलेल्या बोटाच्या डावीकडे 5 ताठ बोटे असतील व उजवीकडे 4 बोटे असतील. म्हणून उत्तर आले 54. $(9\times6=54)$. तसेच, $9\times4$ करताना डावीकडून चौथे बोट दुमडा. या बोटाच्या डावीकडे 3 व उजवीकडे 6 बोटे उरतील. म्हणून उत्तर आले 36. $(9\times4=36)$. एक-अंकी संख्येला 9 ने गुणायचे असेल तर तो तुम्हाला आता 'हातचा मळ' वाटेल.



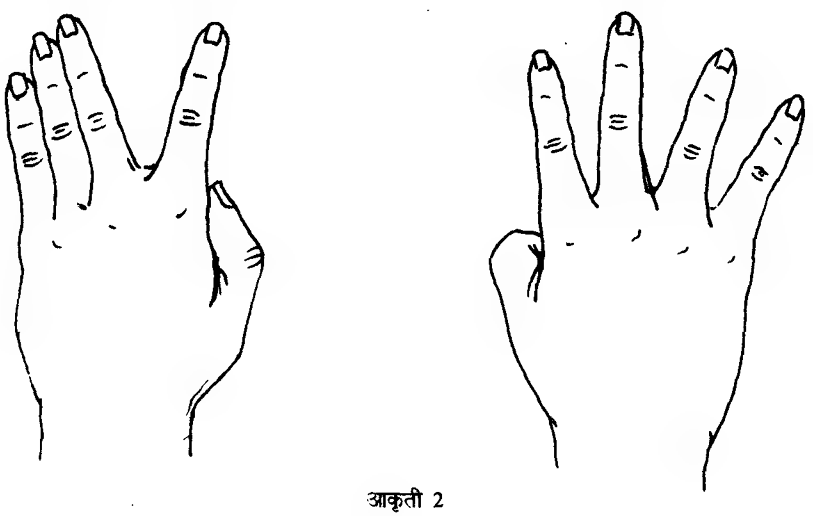
आकृती 1

परंतु दोन-अंकी संख्या असेल तर ? समजा, 36 ला 9 ने गुणायचे आहे. अशा वेळी पुढील कृती करा : 36 मध्ये उजव्या बाजूचा अंक 6 आहे. म्हणून, पहिल्याप्रमाणे, डावीकडून सहावे बोट दुमडा. या बोटाच्या डावीकडे 5 बोटे असतील. आता, 36 मधील डावीकडचा अंक 3 आहे. म्हणून डावीकडून 3 बोटे मोजा व ही तीन बोटे एकत्र करा (आकृती 2 पहा).

या ठिकाणी आपल्याला तीन गटांत बोटे विभागली गेलेली दिसतील. डावीकडून पहिला गट 3 बोटांचा, नंतर 2 बोटांचा व दुमडलेल्या बोटाच्या उजवीकडे 4 बोटांचा गट दिसेल. (यात दुमडलेले बोट धरायचे नाही.) हे तीन अंक डावीकडून एकमेकांच्या शेजारी ठेवल्यास 324 ही संख्या तयार होईल. हेच ($36\times9$) चे उत्तर असेल. ($36\times9=324$).

परंतु या पद्धतीला एक मर्यादा आहे. ही पद्धत वापरण्यासाठी, मूळच्या दोन-अंकी संख्येतील उजवा अंक डावीकडील अंकापेक्षा मोठा असला पाहिजे. (जसे, 36 मध्ये $6>3$.) परंतु जर 63 ला 9 ने गुणायचे असेल तर ही पद्धत वापरता येणार नाही. यावेळी, सुरुवातीला, आपल्याला डावीकडून तिसरे बोट दुमडावे लागेल. यानंतर डावीकडून 6 बोटे मोजावी लागतील. परंतु हे करताना दुमडलेले बोट मध्ये येईल. साहजिकच येथे ही पद्धत चालणार नाही.

या पद्धतीने गुणाकार बरोबर का येतो, ते आता पाहू. यात



आकृती 2

गूढ असे काही नाही. कोणत्याही एक-अंकी संख्येला 9ने गुणले,की 9चे विभाज्य येते. म्हणजेच, या संख्येतील अंकांची बेरीज 9येते. ज्यावेळी आपण एक बोट दुमडतो त्यावेळी 9बोटे शिल्लक राहतात. तसेच, आणखी एक गोष्ट लक्षात घ्यायला हवी. एक-अंकी संख्येला 9 ने गुणल्यास जी संख्या येते त्या संख्येतील डावीकडचा अंक मूळच्या एक-अंकी संख्येपेक्षा 1 ने कमी असतो. उदा., $4\times9=36$. येथे 3 हा अंक 4 पेक्षा 1 ने कमी आहे. $7\times9=63$.येथे 6 हा अंक 7 पेक्षा 1 ने कमी आहे, इत्यादि. म्हणून, दुमडलेल्या बोटाच्या डावीकडील बोटांची संख्या उत्तराच्या संख्येमधील डावीकडच्या अंकाएवढी येते. अर्थात, दोन्ही अंकांची बेरीज 9 असल्यामुळे उरलेला अंक (9– डावीकडील अंक)एवढा येतो.

दोन-अंकी संख्या म्हणजे $10a+b$,व आपल्या पद्धतीसाठी आवश्यक अट म्हणजे $b>a$

आता, $(10a+b)\times9=(90a+9b)$ हे उत्तर येते.
परंतु, $90a+9b=100a-10a+10b-b$

$$=100a+10(b-a)-b$$
$$=100a+10(b-a)-10+10-b$$
$$=100a+10(b-a-1)+(10-b).$$

म्हणजे, उत्तराच्या संख्येतील तीन अंक $a, (b-a-1)$ व $(10-b)$ असतील.

याचा अर्थ, ज्या वेळी आपण $(10a+b)$ या संख्येला 9 ने गुणतो त्या वेळी आपल्याला तीन-अंकी संख्या मिळते. या संख्येतील डावीकडचा अंक मूळच्या संख्येतील डावीकडच्या अंकाएवढाच (a) असतो, उजवीकडील अंक 10वजा मूळच्या संख्येतील उजवीकडचा अंक एवढा, म्हणजे $(10-b)$, असतो, व मधला अंक मूळच्या संख्येतील दोन्ही अंकांची वजाबाकी उणे 1 (म्हणजे, $b-a-1$)एवढा असतो.

समजा, 68 ला 9 ने गुणायचे आहे. येथे $a=6$ व $b=8$ आहे. उत्तरातील तीन अंक, डावीकडून उजवीकडे, 6, $(8-6-1)$ व $(10-8)$, म्हणजेच, 6, 1 व 2 असतील. अर्थात, $68\times9=612$. म्हणून, प्रथम 8वे बोट (उजवीकडील अंक) दुमडायचे व डावीकडून 6 बोटे (डावीकडील अंक) एकत्र करायची. 8 मधून ही 6 बोटे घालविल्यावर,दुमडलेल्या 8 व्या बोटाच्या डावीकडे ( $8-6-1$ ) = 1 बोट उरते. हा उत्तरातील मधला अंक असतो. दुमडलेल्या बोटाच्या उजवीकडील बोटांची संख्या $(10-8)=2$ असते, व हाच उत्तरातील उजवीकडचा अंक असतो.

## 10. विसराळूपणा एकाचा – शोध दुसऱ्याचा

असे सांगतात, की विज्ञानातील अनेक शोध निव्वळ योगायोगाने किंवा अपघाताने लागले. कधी कधी माणूस एखाद्या अडचणीच्या परिस्थितीत सापडतो, आणि त्यातून बाहेर कसे पडायचे, ही त्याची मोठी डोकेदुखी होऊन बसते. कसोटीच्या या विचित्र क्षणी मनुष्याने जर शांतपणे, मन लावून, विचार केला तर शेवटी त्याला उत्तर सापडते आणि तो परिस्थितीवर मात करू शकतो.

एका शाळेत जाणाऱ्या मुलाची ही गोष्ट आहे. तोही एकदा असाच एका अडचणीत सापडला होता. पण, गडबडून न जाता, त्याने खूप विचार करून त्यातून बाहेर येण्यात यश मिळविले आणि, हे करताना, गणितातील एक महत्त्वाचा शोध लावला. तुम्हाला ऐकायची आहे त्याची गोष्ट ?

रवी हा दहावीतला एक हुशार विद्यार्थी, रोजच्या रोज नियमित अभ्यास करणारा. गणित हा तर त्याचा खास आवडीचा विषय. एकदा शाळेत एक गंमतच झाली. भूमितीच्या तासाला गुरुजींनी मुलांना एका रेषाखंडाचे दोन समान भाग करण्याची कृती करण्यास सांगितले. अर्थात, हे करताना मोजमापक म्हणून पट्टी वापरायची नव्हती – फक्त कंपास व, दोन बिंदू जोडण्यासाठी, पट्टीची कडा वापरायला हरकत नव्हती. उजळणीचा तास असल्यामुळे वर्गातील बऱ्याच मुलांना भूमितीतील ही सोपी कृती येत होती. साहजिकच, प्रत्येकजण कंपासपेटी उघडून कामाला लागला. रवीनेही त्याची कंपासपेटी उघडली. पण बघतो तो काय ? पेटी जवळजवळ रिकामी – आतील सगळ्या गोष्टी गायब ! फक्त एक कंपास व त्यात अडकविलेली छोटी पेन्सिल, याशिवाय पेटीत दुसरे काही

नाही. 'हे त्या वेडपट शशीचेच काम असले पाहिजे', रवी स्वतःशी पुटपुटला. (शशी म्हणजे रवीचा धाकटा भाऊ.) आणि ते खरेच होते. आदल्या दिवशी, कशासाठी तरी म्हणून, शशीने रवीची कंपासपेटी घेतली होती, पण काम झाल्यावर परत नीट भरून मात्र ठेवली नव्हती. त्याच्या त्या वेंधळेपणापायी रवी मात्र आज चांगलाच कात्रीत सापडला होता. परंतु तो गडबडला नाही. शेजारच्या मित्राकडून पट्टी घ्यावी का, असा विचारही त्याला शिवला नाही. एक तर त्याला स्वतःलाच असे दुसऱ्याचे उसने घेतलेले आवडत नसे, आणि शिक्षकांनीही त्या गोष्टीला कधी परवानगी दिली नसती. दोनच गोष्टी रवी करू शकत होता. एक म्हणजे काही न करता गप्प बसून राहणे, नाहीतर नुसत्या कंपासने रेषाखंड दुभागता येईल का, याचा विचार करणे. डोक्याने तल्लख असलेल्या रवीने साहजिकच दुसरी गोष्ट करून पाहण्याचे ठरविले. आणि तुमचा विश्वास बसो अगर न बसो, रवीने एक नवी पद्धत शोधून काढली — रेषाखंडाच्या दुभाजनाची, केवळ कंपास वापरून

त्याने पुढील पाच हप्त्यांत कृती पूर्ण केली.

(1) AB हा दिलेला रेषाखंड होता. प्रथम A हे केंद्र व l(AB) ही त्रिज्या घेऊन रवीने एक वर्तुळ काढले (आकृती 1 पहा).

(2) यानंतर B हे केंद्र व तेवढीच [म्हणजे l(AB)] त्रिज्या घेऊन त्याने एक (पहिला) कंस काढला. हा कंस वर्तुळाला C बिंदूशी छेदत होता (आकृती 2 पहा).

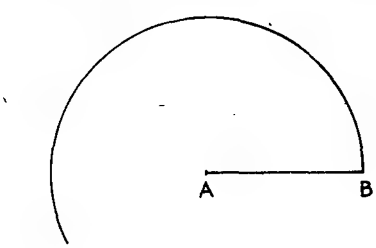
(3) नंतर C हे केंद्र व तेवढीच [म्हणजे l(AB)] त्रिज्या घेऊन त्याने दुसरा कंस काढला. हा कंस वर्तुळाला D बिंदूशी छेदत होता. त्याचप्रमाणे, D हे केंद्र घेऊन व तेवढीच [म्हणजे l(AB] त्रिज्या घेऊन त्याने तिसरा कंस काढून वर्तुळाला E बिंदूशी छेदले (आकृती 3 पहा).

(4) एवढे झाल्यावर, E हे केंद्र व l(EB) ही त्रिज्या घेऊन त्याने चौथा कंस काढला. हा कंस पहिल्या कंसाला F बिंदूशी छेदत होता (आकृती 4 पहा).

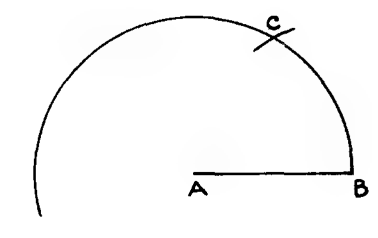
(5) शेवटी F हे केंद्र घेऊन व सुरुवातीची l(AB) ही त्रिज्या घेऊन त्याने पाचवा कंस काढला व या कंसाने मूळच्या AB रेषाखंडाला M बिंदूशी छेदले (आकृती 5 पहा).

M हा AB चा मध्यबिंदू होता. हे सर्व फक्त कंपास वापरून रवीने केले होते. या हुशार मुलाने शिक्षकांना तसे सांगितले. शिक्षकांचा आणि वर्गातील मुलांचा सुरुवातीला त्यावर विश्वास बसेना. शिक्षकांनी रवीला M हा AB चा मध्यबिंदू आहे हे सिद्ध करायला सांगितले. रवीने दोन हप्त्यांत ते काम पूर्ण केले.

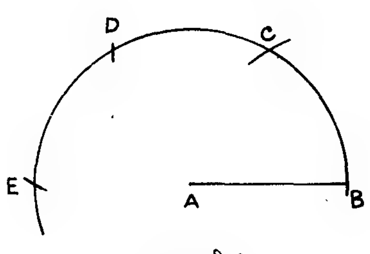
(1) A हे केंद्र व l(AB) ही त्रिज्या घेऊन सुरुवातीला रवीने जे वर्तुळ काढले होते त्याचा व्यास EAB आहे, हे आपण प्रथम सिद्ध करू.



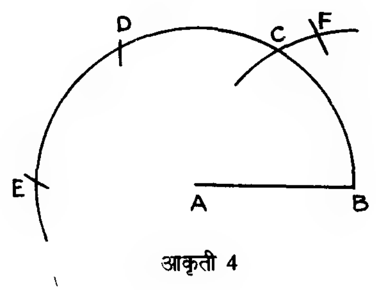

आकृती 1



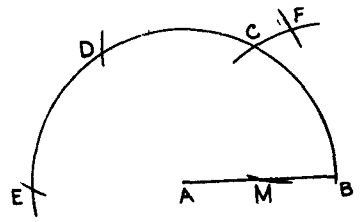

आकृती 2



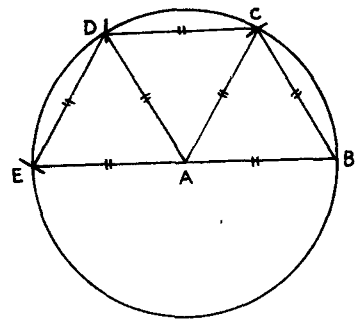

आकृती 3




आकृती 4




आकृती 5




आकृती 6

आकृती 6 प्रमाणे छेदबिंदू जोडा. केलेल्या कृतीमुळे $\triangle ABC$, $\triangle ACD$ व $\triangle ADE$ हे सर्व, आकृती 6 मध्ये दाखविल्याप्रमाणे, समभुज त्रिकोण ठरतात.
म्हणून, $m\angle CAB = m\angle CAD = m\angle DAE = 60°$
$\therefore m\angle CAB + m\angle CAD + m\angle DAE = 180°$
याचा अर्थ, E, A व B हे तिन्ही एकरेषीय बिंदू आहेत.
परंतु, EAB हा रेषाखंड वर्तुळाच्या A या केंद्रातून जातो व त्याचे E व B हे अंत्यबिंदू वर्तुळावर आहेत. म्हणून EAB हा त्या वर्तुळाचा व्यास असला पाहिजे.

(2) आता, M हा AB या रेषाखंडाचा मध्यबिंदू आहे हे सिद्ध करू (आ. 7 पहा).
समजा, $l(AB) = r$
म्हणून, $l(BF) = l(FM) = r$
व $l(EB) = l(EF) = 2r$ } ····(रचनेप्रमाणे)
$\triangle FMB$ मध्ये $l(BF) = l(FM)$
म्हणून $\triangle FMB$ हा समद्विभुज त्रिकोण आहे.
$\therefore m\angle FMB = m\angle FBM$..........(1)
तसेच, $\triangle EBF$ मध्ये $l(EB) = l(EF)$
म्हणून $\triangle EBF$ हा समद्विभुज त्रिकोण आहे.
$\therefore m\angle FBM = m\angle BFE$.......(2)
(1) व (2) वरून,
$m\angle FMB = m\angle BFE$.

आता, $\triangle FMB$ व $\triangle EBF$ या दोन त्रिकोणांमध्ये
$m\angle FMB = m\angle BFE$ ....... ( वर सिद्ध केल्याप्रमाणे )
व $\angle FBM$ हा सामाईक कोन आहे. म्हणून तिसरे कोनही एकरूप असले पाहिजेत.

म्हणजेच, $m\angle MFB = m\angle BEF$.
$\therefore \triangle FMB$ व $\triangle BFE$ हे त्रिकोण समरूप आहेत. अर्थात् त्यांच्या संगत भुजांची गुणोत्तरे सारखी असली पाहिजेत.
म्हणजे,

$$\frac{l(MF)}{l(EF)} = \frac{l(FB)}{l(EB)} = \frac{l(MB)}{l(FB)}$$

किंवा,

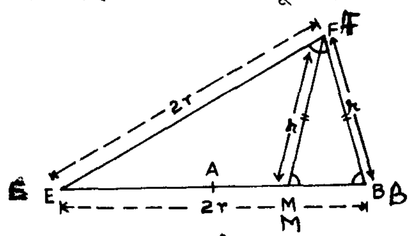
$$\frac{r}{2r} = \frac{r}{2r} = \frac{l(MB)}{r}$$

किंवा,

$$\frac{l(MB)}{r} = \frac{r}{2r} \quad \frac{r}{2} = MB$$

$$\therefore l(MB) = \frac{r}{2} = \frac{l(AB)}{2}$$

याचा अर्थ M हा AB चा मध्यबिंदू आहे.




आकृती 7

(मध्यबिंदू काढण्याच्या या कृतीसाठी,केवळ कंपास वापरलेला आहे. आपण येथे पट्टी वापरली ती केवळ सिद्धतेसाठी, कृतीसाठी नव्हे, ही गोष्टही येथे लक्षात घेणे जरूर आहे.)
(हे प्रकरण Ingenious mathematical problems and methods', डोव्हर प्रकाशन, या पुस्तकातील 11 व्या उदाहरणावर आधारित आहे.)

# 11. जादूचे चौरस

लहान मुले काय आणि मोठी माणसे काय -- अनेक जणांना आकड्यांच्या निरनिराळ्या करामती करून नवीन काहीतरी शोधण्याचा छंद असतो. या छंदातूनच गणितातली मनोरंजक कोडी तयार केली जातात. वेळ छान जावा व करमणूक व्हावी, एवढाच केवळ या खटाटोपाचा उद्देश नसतो, तर अंक व त्यांचे गणित याबद्दलची समजूतही त्यामुळे डोळस होते. याच छंदाचा एक भाग म्हणून अनेक जण जादूचे चौरस तयार करतात. जगाच्या पाठीवरील सर्व देशांत, आणि कदाचित सर्व काळीही, अशा गमतीच्या संख्याछंदाने लोकप्रियतेचे शिखर गाठलेले असावे.

पुढे एक $3\times3$ चौरस दिला आहे. तीन ते चार हजार वर्षांपासून चिनी लोकांना हा चौरस माहीत आहे. कदाचित् तो सर्वात प्राचीन चौरस असावा. हा चौरस तयार करण्यासाठी 1 ते 9 संख्या वापरल्या आहेत. (या प्रकरणात, संख्या म्हणजे धन पूर्ण संख्या, असे आपण समजणार आहोत.)

| | | |
|---|---|---|
| 4 | 9 | 2 |
| 3 | 5 | 7 |
| 8 | 1 | 6 |

प्रत्येक ओळीतील, स्तंभातील व कर्णावरील संख्यांची बेरीज 15 भरते.

अशा चौरसांना जादूचे चौरस म्हणतात. परंतु प्रत्येक वेळी सर्वात लहान संख्या 1 च पाहिजे असे नाही, ती कुठलीही संख्या असू शकेल. जर 1 ही सर्वात लहान संख्या म्हणून वापरली असेल तर अशा चौरसांना आपण, ते वेगळे दाखविण्यासाठी, 'अस्सल जादूचे चौरस' म्हणू शकतो.

16 व्या शतकात जर्मनीमध्ये अल्ब्रेश्ट ड्यूरर् नावाचा एक चित्रकार होऊन गेला. 1 ते 16 संख्या वापरून पुढील $4\times4$ जादूचा चौरस करण्याचे श्रेय त्याच्याकडे जाते.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 16 | 3 | 2 | 13 |
| 5 | 10 | 11 | 8 |
| 9 | 6 | 7 | 12 |
| 4 | 15 | 14 | 1 |

या चौरसातील प्रत्येक ओळीतील, स्तंभातील व दोन्ही कर्णातील संख्यांची बेरीज 34 होते. या चौरसात आणखी गमती आहेत. केंद्राभोवतीच्या चार चौकोनांतील संख्यांची बेरीजही तेवढीच, म्हणजे 34 च, भरते. हा चौरस इ.स. 1514 मध्ये शोधून काढला. या वर्षातील 15 व 14 हे दोन आकडे तळच्या ओळीत शेजारीशेजारी येतात. ड्यूररने मुद्दाम अशी रचना केली होती.

आता हा $5\times5$ चौरस पहा.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 24 | 17 | 15 | 8 |
| 14 | 7 | 5 | 23 | 16 |
| 22 | 20 | 13 | 6 | 4 |
| 10 | 3 | 21 | 19 | 12 |
| 18 | 11 | 9 | 2 | 25 |

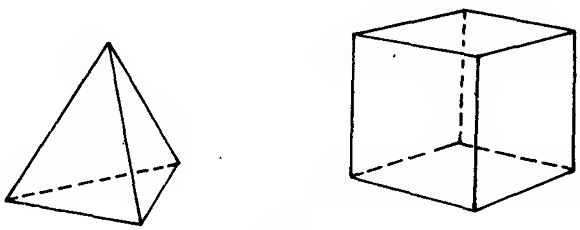
या चौरसात 1 ते 25 या संख्या दिसतात. प्रत्येक ओळीतील, स्तंभातील व कर्णावरील संख्यांची बेरीज 65 येते.

पुढे एक $7\times7$ चौरस दिला आहे.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 4 | 29 | 12 | 37 | 20 | 45 | 28 |
| 35 | 11 | 36 | 19 | 44 | 27 | 3 |
| 10 | 42 | 18 | 43 | 26 | 2 | 34 |
| 41 | 17 | 49 | 25 | 1 | 33 | 9 |
| 16 | 48 | 24 | 7 | 32 | 8 | 40 |
| 47 | 23 | 6 | 31 | 14 | 39 | 15 |
| 22 | 5 | 30 | 13 | 38 | 21 | 46 |

या चौरसात 1 ते 49 या संख्या आहेत. प्रत्येक ओळीतील, स्तंभातील व कर्णावरील संख्यांची बेरीज 175 भरते.

**ऑईलरचा अद्‌भुत चौरस :** लिओनार्ड ऑईलर (1707-1783) हा स्वित्झर्लंडमध्ये जन्मलेला प्रख्यात गणिती. शाळेत गणित शिकत असता आपला दोनदा या नावाशी परिचय होतो. एकदा संच शिकताना, आणि दुसऱ्यांदा प्रिझम (चिती), पिरॅमिड (सूची) वगैरे बहुपृष्ठकांचा अभ्यास करताना. कधी कधी व्हेन आकृत्यांच्या स्वरूपात आपण संच लिहितो. अनेक वेळा, संचांची गणिते सोडविण्यासाठी, हे सोयीचे पडते. व्हेन आकृत्यांची कल्पना पहिल्या प्रथम ऑईलरला सुचली. या कल्पनेत पुढे जॉन व्हेन नावाच्या गणितज्ञाने (1834-1923) भर घातली व ती सुधारली, म्हणून आपण त्या आकृत्यांना व्हेनचे नाव देतो. ऑईलरने आणखी एक शोध लावला. (तसे त्याने अनेक शोध लावले.) कोणत्याही नियमित बहुपृष्ठकाच्या पृष्ठांची संख्या (F), कडांची संख्या (E) व टोकांची (शिरोबिंदूंची) संख्या (V) यामध्ये एक सूत्र नेहमी आढळून येते : $V+F=E+2$. या सूत्राला ऑईलरचे सूत्र म्हणतात. उदाहरणार्थ, 4 पृष्ठे असलेल्या त्रिकोणसूचीला (Tetrahedron) 4 टोके असतात व 6 कडा असतात. म्हणजे, $F=4$, $V=4$ व $E=6$. $(4+4=6+2)$. तसेच, 6 पृष्ठे असलेल्या घनाला (Cube) 8 टोके व 12 कडा असतात. म्हणजे, $F=6$, $V=8$ व $E=12$. $(8+6=12+2)$.



आकृती 1

ऑईलरने पुढील विलक्षण चौरस तयार केला. हा चौरस $8\times8$ होता.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 48 | 31 | 50 | 33 | 16 | 63 | 18 |
| 30 | 51 | 46 | 3 | 62 | 19 | 14 | 35 |
| 47 | 2 | 49 | 32 | 15 | 34 | 17 | 64 |
| 52 | 29 | 4 | 45 | 20 | 61 | 36 | 13 |
| 5 | 44 | 25 | 56 | 9 | 40 | 21 | 60 |
| 28 | 53 | 8 | 41 | 24 | 57 | 12 | 37 |
| 43 | 6 | 55 | 26 | 39 | 10 | 59 | 22 |
| 54 | 27 | 42 | 7 | 58 | 23 | 38 | 11 |

या चौरसात 1 ते 64 या संख्या वापरल्या आहेत. प्रत्येक ओळीतील व स्तंभातील संख्यांची बेरीज 260 होते. एवढेच नव्हे तर, प्रत्येक निम्म्या ओळीतील व स्तंभातील संख्यांची बेरीज 260 च्या निम्मी, म्हणजे 130, भरते. मात्र, एका बाबतीत हा चौरस कमी पडतो. कर्णावरील संख्यांची बेरीज 260 होत नाही. तरीही या चौरसात एक थक्क करणारी गोष्ट लपली आहे. तुम्ही बुद्धिबळाचा पट पाहिला असेल. या पटात 64 छोटे छोटे चौरस असतात. म्हणून, वरील $8\times8$ चौरस हा बुद्धिबळाचा पट आहे, असे आपण समजू. यानंतर एक गमतीची गोष्ट तुमच्या लक्षात येईल. बुद्धिबळातला घोडा अडीच घरे कसा जातो, हे तुम्हास माहीत असेल. (एक घर पुढे-मागे व दोन घरे डावी-उजवीकडे, किंवा दोन घरे पुढे-मागे व एक घर डावी-उजवीकडे, अशी बुद्धीबळातल्या घोड्याची चाल असते.) आता वरील चौरसातील 1 या ठिकाणी हा घोडा ठेवा. यानंतर तो 2 या ठिकाणी जाऊ शकेल. आश्चर्याची गोष्ट म्हणजे, तेथून तो बरोबर 3, 4, 5,......64 पर्यन्त क्रमाने जाईल. या चौरसातील संख्यांची रचना करताना असे असामान्य कौशल्य ऑईलरने दाखविले आहे.

जादूचे चौरस तयार करणे ही तशी सोपी गोष्ट नाही. उदाहरणार्थ, $8\times8$ चौरस तयार करायचा असेल तर 1 ते 64 या संख्या अशा प्रकारे त्यात भरायच्या असतात, की प्रत्येक वेळी 260 एवढी बेरीज येईल. ही रचना अनेक प्रकारे करता येते. केवळ एक चौरस तयार करण्यासाठी आठ-आठ वर्षे सतत काम करणारे लोक आहेत.

या ठिकाणी एक गोष्ट लक्षात घ्यायला पाहिजे. कोणताही $n\times n$ चौरस तयार करता येत नाही. उदाहरणार्थ, $2\times2$ चौरस कधीही होऊ शकत नाही.

| | |
|---|---|
| 1 | 2 |
| 4 | 3 |

| | |
|---|---|
| 1 | 3 |
| 2 | 4 |

| | |
|---|---|
| 1 | 4 |
| 2 | 3 |

जादूचे अनेक चौरस पाहिल्यानंतर एक गोष्ट आपल्या लक्षात येते. अशा सर्व चौरसांच्या बाबतीत पुढील नियम खरा असतो. हा नियम, नवे चौरस तयार करताना, उपयोगी पडू शकतो.

**नियम :** कोणताही $n \times n$ जादूचा चौरस ($n$ ही कोणतीही सम किंवा विषम धन पूर्ण संख्या) तयार करण्यासाठी पहिल्या $n^2$ नैसर्गिक संख्या (म्हणजेच, $1, 2, 3, \ldots\ldots, n^2$) वापराव्या लागतात. अशा चौरसात, प्रत्येक ओळीतील किंवा स्तंभातील संख्यांची बेरीज जर $S$ असेल तर,

$$S = \frac{n(n^2+1)}{2}$$

उदाहरणार्थ, $3 \times 3$ चौरसात,

$$S = \frac{3(9+1)}{2} = 15$$

किंवा $7 \times 7$ चौरसात,

$$S = \frac{7(49+1)}{2} = 175 \text{ इत्यादि.}$$

आता आपण हा नियम सिद्ध करू.

समजा, $1, 2, 3, \ldots\ldots n^2$ या नैसर्गिक संख्या (धन पूर्ण संख्या) वापरून $n \times n$ हा चौरस तयार केलेला आहे. त्यातील प्रत्येक ओळीतील (व स्तंभातीलही) संख्यांची बेरीज $S$ आहे. 1 ते $n^2$ संख्यांच्या बेरजेला आपण $P$ म्हणू.

$$\therefore P = 1+2+3+\ldots\ldots(n^2-1)+n^2 \ldots\ldots (1)$$

हेच आपण पुढीलप्रमाणेही लिहू शकतो.

$$P = n^2+(n^2-1)+(n^2-2)+\ldots\ldots 3+2+1 \ldots (2)$$

(1) व (2) ची बेरीज करून,

$$2P = (n^2+1)+(n^2+1)+(n^2+1)+\ldots\ldots n^2 \text{ वेळा}$$

$$= n^2(n^2+1)$$

$$\therefore P = \frac{n^2(n^2+1)}{2} \ldots\ldots (3)$$

परंतु, $P$ = चौरसातील पहिल्या ओळीतील संख्यांची बेरीज ($S$)
+ दुसऱ्या ओळीतील संख्यांची बेरीज ($S$)
+ तिसऱ्या ओळीतील संख्यांची बेरीज ($S$)
⋮
+ $n^{th}$ ओळीतील संख्यांची बेरीज ($S$)

$$\therefore P = S+S+S+\ldots\ldots n \text{ वेळा}$$

$$\therefore P = nS \ldots\ldots (4)$$

(3) व (4) वरून,

$$nS = \frac{n^2(n^2+1)}{2}$$

$$\therefore S = \frac{n(n^2+1)}{2}$$

पुढे काही श्रेढी दिल्या आहेत. यातील प्रत्येक श्रेढीतील (पहिल्या $n$) संख्यांची बेरीज वरील पद्धतीने काढता येते.

1, 3, 5, 7, 9, 11,..........n पदे
4, 7, 10, 13, 16,..........n पदे
2, 6, 10, 14, 18,..........n पदे
3, 4, 5, 6, 7,..............n पदे

या श्रेढींचे वैशिष्ट्य म्हणजे, प्रत्येक श्रेढीतील शेजारच्या संख्यांमधील फरक, त्या श्रेढीपुरता, तेवढाच कायम असतो. अशा श्रेढींना अंकगणितीय श्रेढी (arithmetical progression) असे म्हणतात.

आता फक्त विषम चौरसांचा ($n$ ही विषम संख्या) विचार करू. अशा सर्व $n \times n$ (उदा., $3 \times 3$, $5 \times 5$, $7 \times 7$, $9 \times 9$ इत्यादि) चौरसांमध्ये एक केंद्रीय जागा (चौरस) असते. उदा., $3 \times 3$ चौरसाच्या केंद्रस्थानी 13, $7 \times 7$ चौरसाच्या केंद्रस्थानी 25, या संख्या असलेल्या आपणांस दिसतील.

पुढे $9 \times 9$, $11 \times 11$ व $13 \times 13$ चौरसांचे नमुने दिले आहेत.

9 × 9 चा चौरस

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 47 | 58 | 69 | 80 | 1 | 12 | 23 | 34 | 45 |
| 57 | 68 | 79 | 9 | 11 | 22 | 33 | 44 | 46 |
| 67 | 78 | 8 | 10 | 21 | 32 | 43 | 54 | 56 |
| 77 | 7 | 18 | 20 | 31 | 42 | 53 | 55 | 66 |
| 6 | 17 | 19 | 30 | 41 | 52 | 63 | 65 | 76 |
| 16 | 27 | 29 | 40 | 51 | 62 | 64 | 75 | 5 |
| 26 | 28 | 39 | 50 | 61 | 72 | 74 | 4 | 15 |
| 36 | 38 | 49 | 60 | 71 | 73 | 3 | 14 | 25 |
| 37 | 48 | 59 | 70 | 81 | 2 | 13 | 24 | 35 |

11 × 11 चा चौरस

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 68 | 81 | 94 | 107 | 120 | 1 | 14 | 27 | 40 | 53 | 66 |
| 80 | 93 | 106 | 119 | 11 | 13 | 26 | 39 | 52 | 65 | 67 |
| 92 | 105 | 118 | 10 | 12 | 25 | 38 | 51 | 64 | 77 | 79 |
| 104 | 117 | 9 | 22 | 24 | 37 | 50 | 63 | 76 | 78 | 91 |
| 116 | 8 | 21 | 23 | 36 | 49 | 62 | 75 | 88 | 90 | 103 |
| 7 | 20 | 33 | 35 | 48 | 61 | 74 | 87 | 89 | 102 | 115 |
| 19 | 32 | 34 | 47 | 60 | 73 | 86 | 99 | 101 | 114 | 6 |
| 31 | 44 | 46 | 59 | 72 | 85 | 98 | 100 | 113 | 5 | 18 |
| 43 | 45 | 58 | 71 | 84 | 97 | 110 | 112 | 4 | 17 | 30 |
| 55 | 57 | 70 | 83 | 96 | 109 | 111 | 3 | 16 | 29 | 42 |
| 56 | 69 | 82 | 95 | 108 | 121 | 2 | 15 | 28 | 41 | 54 |

या तीन चौरसांत केंद्रस्थानी अनुक्रमे 41, 61 व 85 या संख्या आहेत. या सर्व विषम चौरसांच्या बाबतीत एक नवलाईची गोष्ट आपल्याला आढळून येते. या सर्व चौरसांच्या केंद्रस्थानी $\frac{n^2+1}{2}$ ही संख्या आहे.

(उदा., $\frac{3^2+1}{2}=5, \frac{5^2+1}{2}=13, \frac{9^2+1}{2}=41$ वगैरे)

अर्थात, केवळ वरील नमुन्यांवरून आपण हा निष्कर्ष काढला आहे. याला निगमनात्मक अनुमान (inductive inference) असे म्हणतात. कदाचित या अनुमानाला अपवादही असू शकतात. म्हणजे, वरील अनुमान नेहमीच बरोबर असते असे नाही. येथेच आपण एक अपवाद पाहू या. पुढे दिलेला 5×5 चौरस पहा. आता आपल्या अनुमानाप्रमाणे केंद्रस्थानी 13 ही संख्या असायला पाहिजे. आधीच्या 5× 5 च्या चौरसात तशी ती आहेही. परंतु येथे मात्र ती संख्या 13 नसून 20 आहे.

(अर्थात् $20 \neq \frac{5^2+1}{2}$ )

## 13×13 चा चौरस

| | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 93 | 108 | 123 | 138 | 153 | 168 | 1 | 16 | 31 | 46 | 61 | 76 | 91 |
| 107 | 122 | 137 | 152 | 167 | 13 | 15 | 30 | 45 | 60 | 75 | 90 | 92 |
| 121 | 136 | 151 | 166 | 12 | 14 | 29 | 44 | 59 | 74 | 89 | 104 | 106 |
| 135 | 150 | 165 | 11 | 26 | 28 | 43 | 58 | 73 | 88 | 103 | 105 | 120 |
| 149 | 164 | 10 | 25 | 27 | 42 | 57 | 72 | 87 | 102 | 117 | 119 | 134 |
| 163 | 9 | 24 | 39 | 41 | 56 | 71 | 86 | 101 | 116 | 118 | 133 | 148 |
| 8 | 23 | 38 | 40 | 55 | 70 | 85 | 100 | 115 | 130 | 132 | 147 | 162 |
| 22 | 37 | 52 | 54 | 69 | 84 | 99 | 114 | 129 | 131 | 146 | 161 | 7 |
| 36 | 51 | 53 | 68 | 83 | 98 | 113 | 128 | 143 | 145 | 160 | 6 | 21 |
| 50 | 65 | 67 | 82 | 97 | 112 | 127 | 142 | 144 | 159 | 5 | 20 | 35 |
| 64 | 66 | 81 | 96 | 111 | 126 | 141 | 156 | 158 | 4 | 19 | 34 | 49 |
| 78 | 80 | 95 | 110 | 125 | 140 | 155 | 157 | 3 | 18 | 33 | 48 | 63 |
| 79 | 94 | 109 | 124 | 139 | 154 | 169 | 2 | 17 | 32 | 47 | 62 | 77 |

## 5×5 चा चौरस

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 13 | 25 | 7 | 19 | 1 |
| 17 | 4 | 11 | 23 | 10 |
| 21 | 8 | 20 | 2 | 14 |
| 5 | 12 | 24 | 6 | 18 |
| 9 | 16 | 3 | 15 | 22 |

यावरून एक गोष्ट लक्षात येईल. काही उदाहरणे पाहून जर आपण एखादा निष्कर्ष (निगमनात्मक निष्कर्ष) काढला तर तो नेहमीच बरोबर असेल याची खात्री देता येत नाही.

जादूचे चौरस देऊन काही लोक जाहिरात करतात, हे तुम्ही कधी कधी पहिले असेल. ही जाहिरात साधारण पुढीलप्रमाणे असते.

- बुद्धिवान लोकांसाठी सुवर्णसंधी -
पुढील कोडे सोडवा आणि जंगी भेट मिळवा
रेडिओ, फ्रिज, पंखा आणि इतर अनेक
मौल्यवान वस्तू. त्वरा करा आणि
मोठ्या भाग्याचे धनी व्हा !

पुढे एक 4×4 जादूचा चौरस दिला आहे. या चौरसात 1 ते 16 संख्या वापरल्या आहेत. त्यांची स्थिर बेरीज 34 आहे. तुम्ही एक असाच 4×4 चौरस तयार करा. मात्र त्यात 6 ते 21 संख्या अशा भरा, की स्थिर बेरीज 54 येईल. येथे दिलेला चौरस तुम्हाला त्यासाठी उपयोगी पडेल. आहे की नाही सोपे कोडे ? चला, त्वरा करा, आणि महान नशिबाला सामोरे जा!

| | | | |
|---|---|---|---|
| 16 | 3 | 2 | 13 |
| 5 | 10 | 11 | 8 |
| 9 | 6 | 7 | 12 |
| 4 | 15 | 14 | 1 |

या कोड्याचे उत्तर सोपे आहे. दिलेल्या चौरसात S=34 आहे, व S=54 चा चौरस तयार करायचा आहे. आता 54-34=20,हा दोन्ही S मधील फरक आहे. हा फरक चार चौरसांत समान वाटला की, 5 संख्या येते. म्हणजे, दिलेल्या चौरसातील प्रत्येक संख्या 5 ने वाढविली की झाले. अर्थात आपल्याला पुढील चौरस मिळेल. हेच कोड्याचे उत्तर !

| | | | |
|---|---|---|---|
| 21 | 8 | 7 | 18 |
| 10 | 15 | 16 | 13 |
| 14 | 11 | 12 | 17 |
| 9 | 20 | 19 | 6 |

परंतु येथे एक गोम आहे. तुम्ही जरी हे उत्तर जाहिरातवाल्याकडे पाठविले तरी तुम्हाला बक्षिस मिळेलच असे नाही. खरे उत्तर वेगळाच चौकोन आहे, असे म्हणून तो खमक्या जाहिरातदार हात झटकून मोकळा होईल. त्याचे उत्तर पुढीलप्रमाणे असेल :

| | | | |
|---|---|---|---|
| 21 | 10 | 14 | 9 |
| 8 | 15 | 11 | 20 |
| 7 | 16 | 12 | 19 |
| 18 | 13 | 17 | 6 |

तुमच्या उत्तरातील ओळी येथे स्तंभ झाल्या आहेत.

किंवा, संख्यांची वेगळी रचना केलेला पुढील चौरसही त्याचे उत्तर असू शकेल.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 20 | 15 | 8 | 11 |
| 9 | 10 | 21 | 14 |
| 19 | 16 | 7 | 12 |
| 6 | 13 | 18 | 17 |

मनाला मोह घालणाऱ्या अशा जाहिराती कशा फसव्या असतात, हे एव्हाना तुम्हाला नक्कीच समजले असेल.

# 12. पायथॅगोरसच्या प्रमेयाचे विशाल रूप

ग्रीकांचे गणितविषयातील, विशेषतः भूमितीतील, योगदान अत्यंत गौरवास्पद आहे. मनुष्यांच्या बौद्धिक-सांस्कृतिक संपदेमध्ये जोपर्यंत गणिताला विशेष स्थान आहे तोपर्यंत युक्लिड, पायथॅगोरस यांसारख्या महान गणित्यांची नावे विस्मृतीच्या अंधारात विरून जाणे असंभव आहे. इ.स. पूर्वीची काही शतके ग्रीकांचा सुवर्णकाळ म्हणून दाखविता येतो. या काळात जे विख्यात गणिती होऊन गेले त्यांत पायथॅगोरसचे स्थान केवळ अद्वितीय आहे. शाळेत भूमिती शिकत असता, एका प्रमेयाच्या संबंधात, आपल्याला या नावाचा परिचय होतो. कोणत्याही काटकोन त्रिकोणातील भुजांची लांबी जर a व b असेल व कर्णाची लांबी c असेल तर $c^2=a^2+b^2$, हे पायथॅगोरसच्या प्रमेयाचे विधान म्हणून आपल्यापुढे येते.

परंतु पायथॅगोरसच्या प्रमेयाबद्दल व 'पायथॅगोरिअन' या संज्ञेबद्दल काही गैरसमज असू शकतात. हे गैरसमज पुढीलप्रमाणे :

(1) पायथॅगोरसचे प्रमेय त्याच्या आधी कुणालाच माहीत नव्हते.

(2) 'पायथॅगोरिअन' हा शब्द फक्त एकाच व्यक्तीच्या निर्देशात, म्हणजे खुद्द 'पायथॅगोरस' म्हणून, वापरला जातो.

(3) पायथॅगोरसच्या प्रमेयानुसार $c^2=a^2+b^2$. बऱ्याच वेळा या सूत्राचा अर्थ, काटकोन त्रिकोणाच्या तीन भुजांवर काढलेल्या चौरसांच्या क्षेत्रफळांमधील संबंध या सूत्रात सांगितला आहे, असा केला जातो.

हे तीन समज कितपत खरे आहेत, ते आता आपण पाहू.

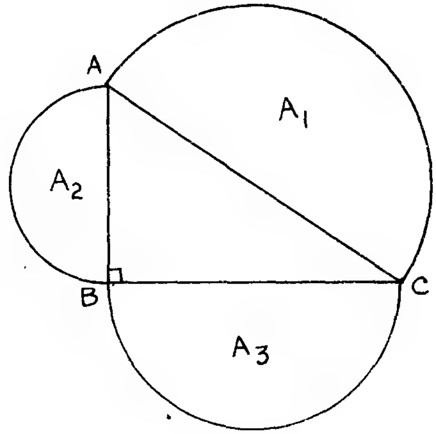
(1) $c^2=a^2+b^2$, हा काटकोन त्रिकोणाचा गुणधर्म भारतीयांना व बॅबिलॉनमधील लोकांना पायथॅगोरसच्या

पूर्वी अनेक वर्षे माहीत होता, हे ऐतिहासिक पुराव्यावरून दिसून येते. किंबहुना, अनेक प्राचीन भारतीय व बॅबिलॉनमधील वास्तुशिल्पांतून या गुणधर्माचा उपयोग केलेला आढळून येतो. परंतु एक गोष्ट मात्र खरी आहे, की या ग्रीकेतरांना $c^2=a^2+b^2$ या सूत्राची कोणतीही भूमितीय सिद्धता (proof) माहीत नव्हती. हे सूत्र पहिल्या प्रथम पायथॅगोरसने शास्त्रशुद्ध रीत्या सिद्ध केले, म्हणून या प्रमेयाशी त्या महान तत्त्ववेत्त्याचे नाव जोडले गेले. (एखादी गोष्ट 'खरी' म्हणून माहीत असणे वेगळे आणि ती तर्कशुद्धपणे सिद्ध करणे वेगळे.)

(2) ग्रीस देशाच्या पूर्वेला, एजिअन समुद्रात, सॅमॉस नावाचे एक छोटे बेट आहे. या बेटावर पायथॅगोरसचा जन्म झाला. इजिप्त, बॅबिलॉन इत्यादि देशांमधून त्याने खूप प्रवास केला. हा प्रवास करताना तो भारतातही येऊन गेला असावा, असा एक समज आहे. या सर्व भ्रमंतीनंतर पायथॅगोरस दक्षिण इटलीतील 'क्रोटॉन' या ठिकाणी आला व तेथे त्याने त्याच्या गुप्त संघटनेची स्थापना केली. या संघटनेतील प्रत्येक सभासद स्वतःला 'पायथॅगोरिअन' असे म्हणवून घेत असे. कोणाही एका सभासदाने एखादा महत्त्वाचा शोध लावला किंवा एखादे बौद्धिक यश संपादिले तर ते सर्व 'पायथॅगोरिअन' या नावाशी जोडले जायचे. या संघटनेतील सर्व सभासदांवर, त्यांच्या समजुती, श्रद्धा व वर्तणूक-व्यवहार याबाबतीत, कडक निर्बंध होते. विचारस्वातंत्र्यावरील ही बंधने किती कडक होती याबद्दलचा एक गमतीचा किस्सा सांगितला जातो. हिप्पॅसस् म्हणून एक 'पायथॅगोरिअन' होता. त्याने गणितातील एक शोध लावला. एखादी रेषा घेतली तर त्यावर आपण 0, ±1, ±2, ±3, ±4,......इत्यादि धन-ऋण पूर्णांक व ±0.5, ±0.75, ±1.5, ±2.25,.......वगैरे धन-ऋण अपूर्णांक निरनिराळ्या बिंदूंनी स्थापू शकतो. शून्य धरून धन-ऋण पूर्णांक व अपूर्णांक, या सर्व संख्यांना परिमेय संख्या (rational numbers) म्हणतात. हिप्पॅसस्ने असे सिद्ध केले, की कोणत्याही संख्यारेषेवर परिमेय संख्यांबरोबर अपरिमेय संख्यांचेही बिंदू असतात. (सर्व परिमेय व अपरिमेय संख्यांच्या संचाला वास्तव संख्यांचा संच म्हणतात.) म्हणजे, कोणत्याही वास्तव संख्येचा बिंदू संख्यारेषेवर दाखविता येतो. आज आपण हे सर्व शाळेत शिकतो. परंतु त्या काळी, पायथॅगोरसच्या संघटनेप्रमाणे, हा शोध म्हणजे पाखंडीपणा होता. असे सांगतात, की या शोधासाठी हिप्पॅसस्ला देहांताची शिक्षा मिळाली — त्याला उचलून चक्क समुद्रात बुडविण्यात आले !

(3) $c^2=a^2+b^2$ हे सूत्र एखाद्या काटकोन त्रिकोणाच्या तीन भुजांवर काढलेल्या चौरसांच्या क्षेत्रफळाच्या संबंधातच केवळ खरे आहे, असे नव्हे. त्याला यापेक्षा खूपच व्यापक अर्थ आहे. काटकोन त्रिकोणाच्या भुजांवर काढलेल्या कोणत्याही आकाराच्या समरूप आकृत्यांबाबत पायथॅगोरसचे सूत्र खरे ठरते.

(अ) **वर्तुळे :** ABC या काटकोन त्रिकोणात AC हा कर्ण आहे. या त्रिकोणाच्या भुजा व्यास धरून त्यांवर अर्धवर्तुळे काढा. या अर्धवर्तुळांची क्षेत्रफळे $A_1$, $A_2$ व $A_3$ आहेत, असे समजू (आकृती 1 पहा). $A_1$ हे कर्णावर काढलेल्या अर्धवर्तुळाचे क्षेत्रफळ आहे.




आकृती 1

$A_1=A_2+A_3$, हे आपल्याला सिद्ध करता येईल.

**सिद्धता :**

$$A_1=\frac{1}{2}\pi\left[\frac{l(AC)}{2}\right]^2 \quad \text{.....(अर्धवर्तुळाचे क्षेत्रफळ)}$$

$$=\frac{\pi}{8}(l(AC))^2$$

तसेच, $A_2=\frac{\pi}{8}(l(AB))^2$

व $A_3 = \frac{\pi}{8}(l(BC))^2$

$\therefore A_2 + A_3 = \frac{\pi}{8}[(l(AB))^2 + (l(BC))^2]$

परंतु पायथॅगोरसच्या प्रमेयानुसार,

$[l(AB)]^2 + [l(BC)]^2 = [l(AC)]^2$

$\therefore A_2 + A_3 = \frac{\pi}{8}[l(AC)]^2 = A_1$

$A_1 = A_2 + A_3$ हे सूत्र, अर्धवर्तुळांप्रमाणे, वर्तुळांसाठीही खरे आहे, हे उघड आहे.

(ब) **समरूप त्रिकोण :**

**पक्ष :** (1) ABC हा काटकोन त्रिकोण आहे.

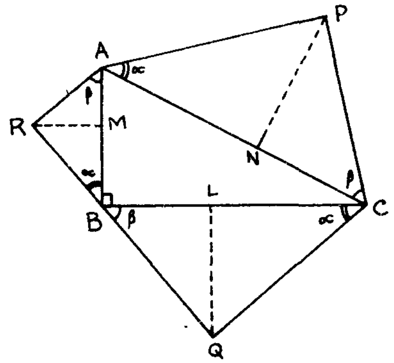
$m\angle ABC = 90^\circ$

(2) या त्रिकोणाच्या तिन्ही भुजांवर समरूप त्रिकोण काढले आहेत.

म्हणजे, $m\angle BCQ = m\angle CAP = m\angle ABR = \alpha$

व $m\angle CBQ = m\angle ACP = m\angle RAB = \beta$.

$\therefore \triangle BCQ$, $\triangle ACP$ व $\triangle ARB$ हे तीन समरूप त्रिकोण आहेत [आ. 2 पहा].




आकृती 2

**साध्य :** $\triangle APC$ चे क्षेत्रफळ $= \triangle BRA$ चे क्षेत्रफळ $+ \triangle CQB$ चे क्षेत्रफळ.

**रचना :** PN हा AC वर, QL हा BC वर, व RM हा AB वर लंब काढा.

**सिद्धता :** $\triangle ARB$, $\triangle PAC$ व $\triangle BQC$ हे त्रिकोण समरूप असल्यामुळे,

$$\frac{l(BR)}{l(BA)} = \frac{l(AP)}{l(AC)} = \frac{l(QC)}{l(BC)} = K \text{ (समजा)}$$

आता, $\triangle ARB$ चे क्षेत्रफळ $= \frac{1}{2} l(BA) \times l(RM)$

परंतु, $l(RM) = l(BR) \sin\alpha$

[ABC या काटकोन त्रिकोणात, $\angle B$ काटकोन असताना, $\frac{l(BA)}{l(AC)}$ या गुणोत्तराला $\angle C$ ची sine किंवा sin C म्हणतात.

जर $m\angle C = \alpha$ तर $\frac{l(BA)}{l(AC)} = \sin\alpha$]

$\therefore \triangle ARB$ चे क्षेत्रफळ $= \frac{1}{2} l(BA) \times l(BR) \sin\alpha$

$= \frac{1}{2} l(BA) \times K l(BA) \sin\alpha$

$= \frac{1}{2} K(l(BA))^2 \sin\alpha$ ......(1)

त्याचप्रमाणे,

$\triangle CQB$ चे क्षेत्रफळ $= \frac{1}{2} l(BC) \times l(QL)$

$= \frac{1}{2} l(BC) \times l(QC) \sin\alpha$

$= \frac{1}{2} l(BC) \times K l(BC) \sin\alpha$

$= \frac{1}{2} K(l(BC))^2 \sin\alpha$ .......(2)

(1) व (2) मिळवून,

$\triangle ARB$ चे क्षेत्रफळ $+ \triangle CQB$ चे क्षेत्रफळ

$= \frac{1}{2} K\sin\alpha (l(BA))^2 + \frac{1}{2} K\sin\alpha (l(BC))^2$

$= \frac{1}{2} K \sin\alpha [(l(BA))^2 + (l(BC))^2]$

$= \frac{1}{2} K \sin\alpha [l(AC))]^2$

......(पायथॅगोरसच्या प्रमेयाप्रमाणे)

$= \frac{1}{2} K l(AC).l(AC) \sin\alpha$

$= 1/2 l(AP).l(AC) \sin\alpha \ldots (\because l(AP)/l(AC) = K)$

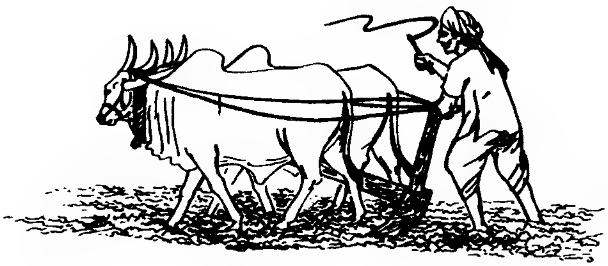
$= \frac{1}{2} l(AC) l(AP) \sin\alpha$

$= \frac{1}{2} l(AC).l(PN) \ldots\ldots\ldots (l(PN)/l(AP) = \sin\alpha)$

$= \triangle APC$ चे क्षेत्रफळ........($\because \triangle APC$ चा $l(AC)$ हा पाया व $l(PN)$ ही उंची).

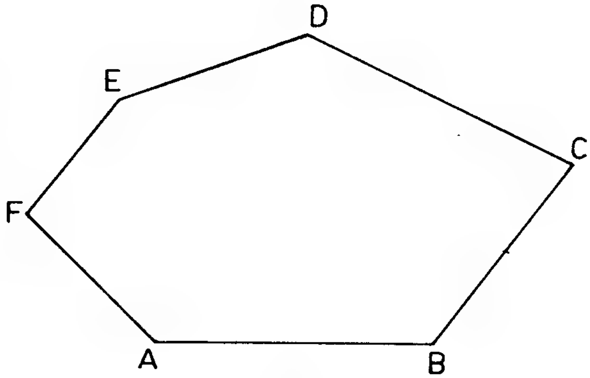
# 13. सोनेरी गणित

महुआ नावाचे एक छोटे खेडेगाव होते. त्या गावात महीपाल नावाचा एक गरीब शेतकरी राहत असे. गावातल्या इतर लोकांप्रमाणे महीपालही एक साधासुधा, भावभोळा, अशिक्षित माणूस होता. त्या सबंध गावात शाळाशिक्षक ही एकच व्यक्ती शिकलेली होती. या शिक्षकाचे नाव होते सुदर्शन. वयाने लहान असूनही आपल्या ज्ञानाचा फायदा नेहमी इतरांना द्यावा, हे सुदर्शनचे जीवनव्रत होते. या उपकारक वृत्तीमुळे सुदर्शनगुरुजी सर्व गावकऱ्यांचे एक आदराचे व विश्वासाचे स्थान होते.



आकृती 1

महीपाल रोज स्वतःच्या शेतात जाऊन राबत असे. एके दिवशी एक गंमतच झाली. शेताची नांगरट करीत असता महीपालला जमिनीत अर्धवट गाडलेले चकचकीत असे काहीतरी दिसले महीपालने जवळ जाऊन आजूबाजूची माती बाजूला केली व ती वस्तू उपसून बाहेर काढली. नीट पाहिल्यावर त्याच्या लक्षात आले, की तो सोन्याचा एक छोटा पत्रा आहे. आता त्या तुकड्याचा आकार थोडा वेडावाकडा होता हे खरे (आकृती 2 पहा), पण त्याची जाडी चांगली होती व ती सर्व ठिकाणी सारखीच होती. तशात तो अस्सल सोन्याचा पत्रा होता, ही गोष्टही महत्त्वाची होती.




आकृती 2

महीपालची कृष्णावर फार भक्ती होती. त्या कृपाळू भगवंतानेच ही भेट आपल्याकडे पाठवून आपल्याला आशीर्वाद दिले, अशी त्याची खात्री झाली. आता या सुवर्णाचा एक छानसा चौकोनी तुकडा करावा व त्यावर भगवान कृष्णाची सुंदर प्रतिमा कोरून घ्यावी, असे त्याच्या मनाने घेतले. मात्र हे करताना पत्र्याची जाडी तेवढीच राहिली पाहिजे, असे त्याने ठरविले. नाहीतरी पूजेसाठी याहून मौल्यवान मूर्ती तो कोठून आणणार होता ?

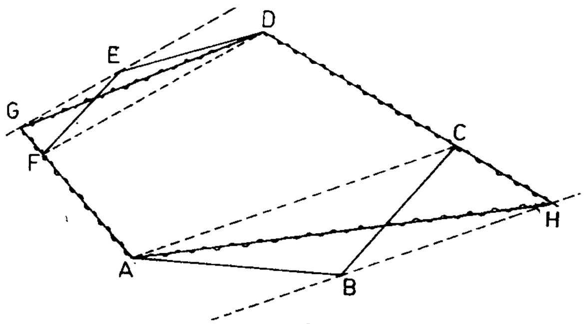
सोनाराकडे जाण्याआधी प्रथम सुदर्शनचा सल्ला घ्यावा असे त्याने ठरविले. सुदर्शनला सुवर्णपत्र दाखवून आपला बेतही त्याने त्याच्या कानी घातला. 'केवढा मोठा चौकोन (चौरस) होईल याचा ?' महीपालने सुदर्शनला विचारले. सोनाराकडून फसायला नको, म्हणून महीपालला याचे उत्तर आधीच हवे होते. 'आपण दोघे मिळून उत्तर शोधून काढू या', सुदर्शन म्हणाला. आता, सुदर्शनजवळ प्रयोगशाळेतील तराजू, मायक्रोमीटर स्क्रू-प्रमापी वगैरे काहीच उपकरणे नव्हती. ती असती तर त्या तुकड्याचे वजन करुन व जाडी मोजून सुदर्शनने पुढील सूत्रावरून लगेच उत्तर काढले असते. (तराजूने काढलेले वजन हे खरे म्हणजे त्या वस्तूचे वस्तुमान M असते.)

चौरसाची लांबी (l)

$$= \sqrt{\frac{\text{तुकड्याचे वस्तुमान (M)}}{\text{तुकड्याची जाडी (t)} \times \text{सोन्याची घनता(d)}}}$$

(चौरसाचे आकारमान (V) $= l^2 \times t$ व सोन्याची घनता (d) $= \frac{M}{l^2 \times t}$ या सूत्रांवरून वरील सूत्र काढले आहे.)

परंतु असे करणे उपकरणांअभावी शक्य नव्हते. आता आली का पंचाईत ! केवळ भूमितीच्या सहाय्याने उत्तर काढायचे, म्हणजे एक अवघडच गोष्ट होती. पण सुदर्शनने प्रयत्न करून पहायचे ठरविले. त्याच्याकडे एक कंपासपेटी होती. त्याने त्या तुकड्याचा आकार एका कागदावर काढून घेतला. हा आकार होता एका वेड्यावाकड्या षटकोनाचा (आकृती 2 पहा). त्याने त्या षटकोनाच्या शिरोबिंदूंना नावे दिली A, B, C, D, E, आणि F. प्रथम F व D जोडून त्याने FD रेषेला E मधून एक समांतर रेषा काढली. AF वाढवून तिने त्या रेषेला G मध्ये छेदले. EG ही FD ला समांतर रेषा झाली. त्याचप्रमाणे A व C जोडून त्याने AC रेषेला B मधून एक समांतर रेषा काढली व DC वाढवून तिने त्या रेषेला H मध्ये छेदले. BH ही AC ला समांतर रेषा झाली (आकृती 3 पहा).

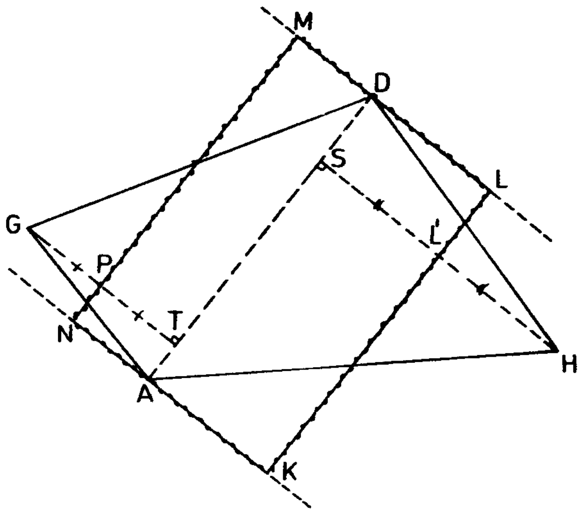



आकृती 3

The quadrilateral AHDG (shown by wavy lines) is obtained from the irregular hexagon ABCDEF.

मूळच्या ABCDEF या षटकोनाचे क्षेत्रफळ AHDG या चौकोनाएवढेच आहे, असा निष्कर्ष सुदर्शनने प्रथम काढला. (कसा काढला, ते आपण नंतर पाहणार आहोत.)

यानंतर त्याने AHDG हा चौकोन दुसऱ्या एका कागदावर काढून घेतला (आकृती 4 पहा). नंतर A व D हे दोन बिंदू

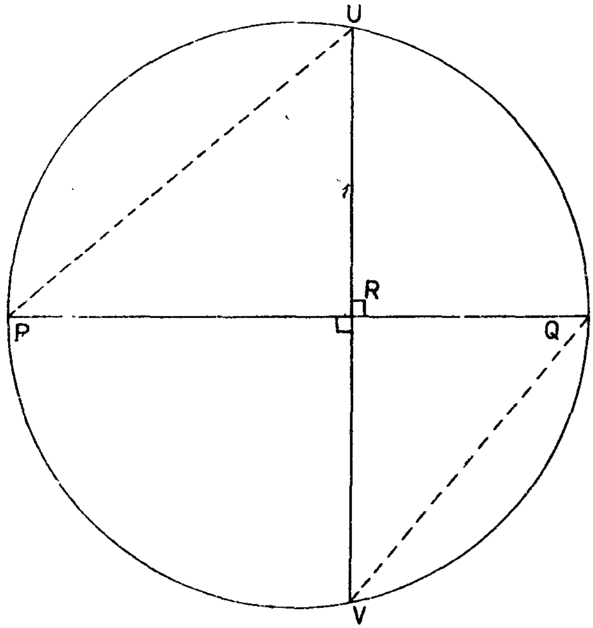



आकृती 4

**The rectangle KLMN (shown by wavy lines) is obtained from the quadrilateral AHDG.**

जोडून त्याने AD वर AN व DM हे दोन लंब काढले. तसेच, त्याने AD वर GT व HS हे दोन लंब टाकले. NM व KL' हे अनुक्रमे GT व HS चे लंबदुभाजक होते. MD वाढविल्यावर KL' ने तिला L या बिंदूशी छेदले. अर्थात P व L' हे अनुक्रमे GT व HS चे मध्यबिंदू होते, हे ओघाने आलेच. KLMN हा आयत तयार झाला. या आयताचे क्षेत्रफळ आधीच्या AHDG या चौकोनाच्या क्षेत्रफळाएवढेच (व म्हणून मूळच्या ABCDEF या वेड्यावाकड्या षटकोनाच्या क्षेत्रफळाएवढेच) आहे, हा सुदर्शनचा दुसरा निष्कर्ष होता.

आता शेवटचा टप्पा ! सुदर्शनने दुसऱ्या एका कागदावर PQ हा रेषाखंड काढला. या खंडाची लांबी l(PQ)=l(KL)+l(LM) एवढी होती (आकृती 5 पहा). PQ या व्यासावर त्याने एक वर्तुळ काढले. यानंतर त्याने PQ वर R हा बिंदू असा घेतला की, l(PR)=l(KL). अर्थातच, l(RQ)=l(LM). R मधून UV हा PQ ला लंब काढून सुदर्शनने कृती पूर्ण केली. U व V हे या लंबाचे वर्तुळाशी होणारे छेदबिंदू होते. l(PR)=l(KL), l(RQ)=l(LM) आणि l(UR)=l(RV). l(UR) एवढी लांबी घेऊन सुदर्शनने दुसऱ्या एका कागदावर $S_1S_2S_3S_4$ हा चौरस काढला. या चौरसाचे क्षेत्रफळ आधीच्या KLMN या आयताच्या क्षेत्रफळा-एवढे आहे, हा सुदर्शनचा तिसरा व शेवटचा निष्कर्ष होता.

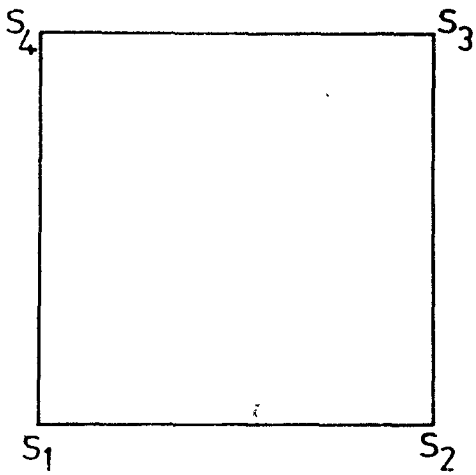



आकृती 5

l(PR) = l(KL)

l(RQ) = l (LM), l(UR) = l(RV).

यावरून निश्चित होत होते, की महीपालला सोनाराकडून $S_1S_2S_3S_4$ एवढा चौरस मिळाला पाहिजे (आकृती 6 पहा).




आकृती 6

$l(S_1S_2) = l(S_2S_3) = l(UR)$

परंतु हे सर्व, सुदर्शनचे निष्कर्ष कितपत बरोबर आहेत, यावर अवलंबून होते. आपण हे तिन्ही निष्कर्ष आता सिद्ध करू.

**निष्कर्ष** 1: ABCDEF या षट्कोनाचे क्षेत्रफळ = AHDG या चौकोनाचे क्षेत्रफळ (आकृती 3 पहा).

**सिद्धता :** कोणत्याही त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ = 1/2× पाया × उंची, एवढे असते.

$\triangle$EFD चे क्षेत्रफळ = $\triangle$ GFD चे क्षेत्रफळ ......( कारण दोन्ही त्रिकोणांचा पाया समान म्हणजे FD आहे व त्यांची उंचीही, GE ॥ FD असल्यामुळे, सारखीच आहे.)

तसेच,

$\triangle$ABC चे क्षेत्रफळ = $\triangle$ AHC चे क्षेत्रफळ ....( कारण AC हा समान पाया व दोन्ही त्रिकोणांची उंची तेवढीच)

आता, ABCDEF या षटकोनाचे क्षेत्रफळ
= $\triangle$ABC चे क्षेत्रफळ + ACDF या चौकोनाचे क्षेत्रफळ + $\triangle$EFD चे क्षेत्रफळ
= $\triangle$AHC चे क्षेत्रफळ + ACDF या चौकोनाचे क्षेत्रफळ + $\triangle$GFD चे क्षेत्रफळ
= AHDG या चौकोनाचे क्षेत्रफळ.

**निष्कर्ष** 2: AHDG या चौकोनाचे क्षेत्रफळ =KLMN या आयताचे क्षेत्रफळ (आकृती 4 पहा).

**सिद्धता :** AN व DM या दोन्ही रेषा AD ला लंब असल्यामुळे त्या एकमेकींना समांतर आहेत. म्हणजेच,

AN ॥ DM.......(1)

तसेच, AD व MN या दोन्ही रेषा GT ला लंब असल्यामुळे त्याही एकमेकींना समांतर आहेत. म्हणजेच,

AD ॥ MN.......(2)

(1) व (2) वरून, ADMN हा समांतरभुज चौकोन आहे.

परंतु m $\angle$ NAD = 90° असल्यामुळे, खरे तर, ADMN हा आयत आहे.

आता, $\triangle$GAD चे क्षेत्रफळ = 1/2×l(AD)×l(GT)
= l(AD)×l(GT)/2
= l(AD)×l(PT)
= l(AD)×l(AN)
= ADMN या आयताचे क्षेत्रफळ....... (3)

त्याचप्रमाणे आपण दाखवू शकतो की, $\triangle HAD$ चे क्षेत्रफळ = AKLD या आयताचे क्षेत्रफळ......(4)

(3) व (4) वरून,

AHDG या चौकोनाचे क्षेत्रफळ = $\triangle$ GAD चे क्षेत्रफळ + $\triangle HAD$ चे क्षेत्रफळ

=ADMN या आयताचे क्षेत्रफळ +AKLD या आयताचे क्षेत्रफळ

=KLMN या आयताचे क्षेत्रफळ.

**निष्कर्ष** 3: KLMN या आयताचे क्षेत्रफळ = $S_1S_2S_3S_4$ या चौरसाचे क्षेत्रफळ (आकृती 5 पहा).

**सिद्धता :** PQ हा वर्तुळाचा व्यास आहे व UV ही त्या व्यासाला लंब असलेली जीवा आहे. म्हणून PQ हा UV चा लंबदुभाजक आहे. म्हणजे, $l(UR)=l(RV)$.

आता, $\triangle RPU$ व $\triangle RVQ$ पहा. या त्रिकोणांत,

$m\angle PRU = m\angle VRQ$.....(विरुद्ध बाजूंचे कोन)

$m\angle PUR = m\angle RQV$.....(हे दोन्ही कोन PV या एकाच वर्तुळखंडाने वर्तुळावर केलेले आहेत)

म्हणून $\triangle RPU$ व $\triangle RVQ$ हे एकमेकांना समरूप आहेत. अर्थात, त्यांच्या संगतभुजांची गुणोत्तरे सारखी आहेत.

म्हणजेच,

$$\frac{l(PR)}{l(RV)} = \frac{l(RU)}{l(RQ)}$$

$$l(PR)\times l(RQ)=l(RU)\times l(RV)$$

$$=[l(RU)]^2 .......(\because l(RU)=l(RV))$$

आता, $l(PR)=l(KL)$

$l(RQ)=l(LM)$ ......(रचनेवरून)

व $l(RU)=l(S_1S_2)$

वरील सूत्रात घालून,

$$l(KL)\times l(LM)=[l(S_1S_2)]^2$$

किंवा, KLMN या आयताचे क्षेत्रफळ = $S_1S_2S_3S_4$ या चौरसाचे क्षेत्रफळ.

महीपालने शेजारच्या सोनाराकडून चौरस आकाराचा व मूळच्याच जाडीचा सोन्याचा पत्रा करून घेतला व त्यावर कृष्णाची प्रतिमाही कोरून घेतली. चौरसाचा आकार बरोबर सुदर्शनने सांगितल्याप्रमाणे झालेला पाहून त्या भाबड्या शेतकऱ्याचा आपल्या हुशार मित्रावरील विश्वास दुप्पट झाला. (सोनाराने फसविले नाही, हेही एक आश्चर्यच होते !).

# 14. निसर्गसौंदर्यातही गणिताचे दर्शन

गौरंगची परीक्षा झाली आणि तो वर्गात पहिला आला,तेव्हा त्याच्या आनंदाला पारावार राहिला नाही. त्याच्या वडिलांनीही त्याचे तोंड भरून कौतुक केले. 'तू परीक्षेत छान पास झालास तर तुला कपिलधारेला नेईन', असे वडिलांनी त्याला आधीच वचन दिले होते. कपिलधारा हे एक अतिशय रम्य असे थंड हवेचे ठिकाण होते. सुंदर सुंदर पशु-पक्ष्यांनी गजबजलेले कपिलधारा, उन्हाळ्याच्या मोसमात, अनेक हौशी प्रवाशांचे आवडते यात्रास्थान होते. सरकारने नुकतीच त्या ठिकाणी दोन आलिशान हॉटेले बांधली होती – गुलमर्ग आणि सोनमर्ग नावाची. कपिलधारेला जाण्याचा दिवस जसा जवळ येत चालला तसा गौरंगचा उत्साह अधिकच वाढू लागला. कधी एकदा या मस्त ठिकाणी आपण जातोय, असे त्याला होऊन गेले.

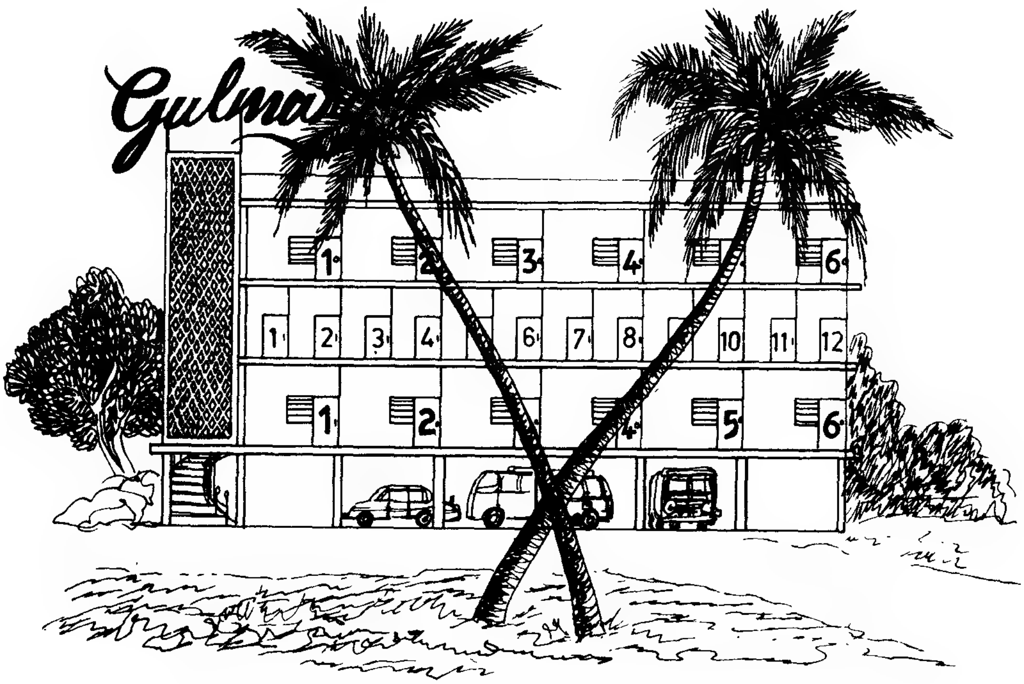
अखेर एकदाचा तो दिवस उजाडला. छोट्या गौरंगच्या वडिलांनी, दोघांसाठी, एक खोली सोनमर्ग हॉटेलच्या दुसऱ्या मजल्यावर घेतली. या हॉटेलच्या समोरच गुलमर्ग हॉटेल थाटामाटात उभे होते. गौरंग कितीतरी वेळ आपल्या खोलीतून त्या हॉटेलकडे पाहत राही. रंगीबेरंगी कपडे घातलेल्या प्रवाशांची त्या हॉटेलात सारखी ये-जा चालू असे. गुलमर्गकडे पाहताना एक दिवस त्याच्या लक्षात आले, की त्या उंच हॉटेलच्या पहिल्या व तिसऱ्या मजल्यावर, दोघा-दोघांना

राहण्यासाठी, मोठ्या खोल्या होत्या, तर दुसऱ्या मजल्यावर मात्र एकएका प्रवाशांसाठी छोट्या खोल्यांची रांग होती. चहूबाजूंनी लावलेल्या उंच नारळीपोफळींनी त्या इमारतीची शोभा अधिकच वाढली होती. त्यांतली दोन, विरुद्ध दिशांना उंच आकाशात गेलेली, झाडे हॉटेलसमोरच रखवालदारासारखी पहारा करीत उभी होती.

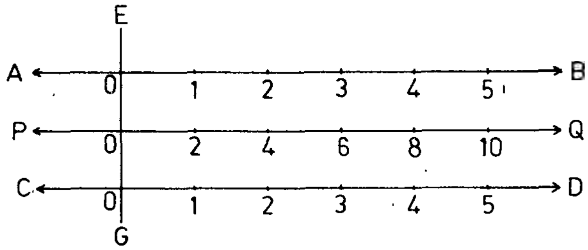
एक दिवस, हे सुंदर दृश्य पाहताना, एक विचित्र गोष्ट गौरंगला आढळून आली. गुलमर्गमधील खोल्या आणि त्यांच्यापुढील नारळाची दोन तिरकी झाडे यांच्यातून नकळत एक गंमत निर्माण झाली होती. एका झाडाने गुलमर्ग इमारतीच्या पहिल्या, दुसऱ्या व तिसऱ्या मजल्यावरील अनुक्रमे खोली क्रमांक 4,9 व 5 झाकून टाकले होते. गंमत अशी होती, की पहिल्या व तिसऱ्या मजल्यावरील खोलीक्रमांकांची (म्हणजे 4 व 5 यांची) बेरीज बरोबर मधल्या (म्हणजे दुसऱ्या) मजल्यावरील खोलीक्रमांकाएवढी (म्हणजे 9 एवढी) होती. कमाल म्हणजे, दुसऱ्या झाडाचीही तीच गत होती. त्या झाडाने गुलमर्गच्या पहिल्या मजल्यावरील क्रमांक 3, दुसऱ्या मजल्यावरील क्रमांक 5 व तिसऱ्या मजल्यावरील क्रमांक 2 च्या खोल्या झाकल्या होत्या. येथेही पहिल्या व तिसऱ्या मजल्यावरील खोलीक्रमांकांची बेरीज मधल्याएवढी येत होती. (आकृती 1 पहा).

गौरंगला थोडे आश्चर्य आणि थोडी गंमतही वाटली. गौरंग हा जात्याच हुशार मुलगा होता. हे सर्व केवळ योगायोगाने झाले आहे, की यात गणिताचे एखादे तत्त्व दडले आहे, याचा पुरता छडा लावायचा त्याने निश्चय केला. त्याने एका कागदावर AB, PQ आणि CD अशा तीन समांतर रेषा काढल्या. या रेषांमधील अंतर त्याने सारखे ठेवले होते. या तीन रेषांना त्याने EG ही एक समान लंबरेषा काढली व तीन छेदबिंदूंना शून्य अंक (आरंभबिंदू म्हणून) दिला. नंतर त्याने प्रत्येक रेषेवर, समान अंतर ठेवून, बिंदू काढले. AB व CD रेषांवरील बिंदूंपाशी त्याने क्रमाने 1, 2, 3, 4,.......अशा संख्या लिहिल्या व मधल्या PQ रेषेवरील बिंदूंना, त्यांच्या खालच्या किंवा वरच्या बिंदूंच्या संख्येपेक्षा, दुप्पट संख्या दिल्या (आकृती 2 पहा).

एक पट्टी घेऊन त्याने ती या तीन रेषांना छेदेल अशा निरनिराळ्या प्रकारे ठेवून पाहिली. प्रत्येक वेळी त्याच्या लक्षात आले की,

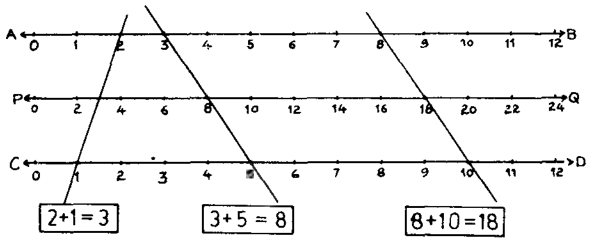



आकृती 1



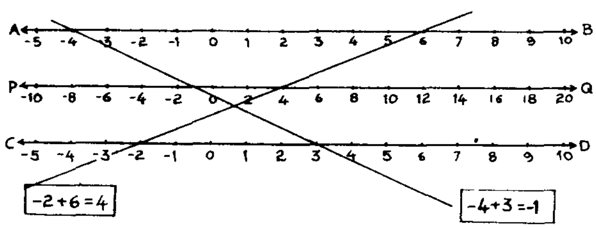

आकृती 2

AB वरील संख्या + CD वरील संख्या = PQ वरील संख्या (आकृती 3 पहा).




आकृती 3

गौरंगच्या जे लक्षात आले ते गणितज्ञांना मुळीच नवीन नाही. किंबहुना धन किंवा ऋण पूर्ण संख्यांच्या बेरजेसाठी ही पद्धत सहज उपयोगी पडू शकते. आकृती 4 वरून आपल्या हे **सहज** लक्षात येईल.




आकृती 4

बेरीज करण्यासाठी ही सोयिस्कर पद्धत आहे. केवळ दिलेल्या दोन संख्या AB व CD वर घेऊन त्यांवर एका पट्टीची कडा ठेवली, की मधल्या रेषेवरील संख्या ही त्या बेरजेचे उत्तर असते. यांना नोमोग्राफ असे म्हणतात. गुंतागुंतीची किचकट आकडेमोड करण्यापेक्षा नोमोग्राफच्या सहाय्याने, केवळ संख्या वाचून, उत्तर येते. नोमोग्राफचे अनेक प्रकार आहेत. विशिष्ट प्रकारच्या आकडेमोडीसाठी विशिष्ट प्रकारचे नोमोग्राफ वापरावे लागतात.

वरील नोमोग्राफ (तीन समांतर रेषा) बेरजेसाठी का उपयोगी पडतो, हे आता पाहू. यासाठी आपण तीन भागांमध्ये विभागणी करू.

1. जेव्हा दोन्ही संख्या धन असतात.
2. जेव्हा दोन्ही संख्या ऋण असतात.
3. जेव्हा एक संख्या धन व दुसरी ऋण असते.

**विभाग 1.**

<u>दोन धन संख्यांची बेरीज</u> :

$O_1$, $O_2$ आणि $O_3$ हे समांतर रेषांवरील आरंभबिंदू समजू (आकृती 5 पहा). सर्व अंतरे d ने दाखवू.

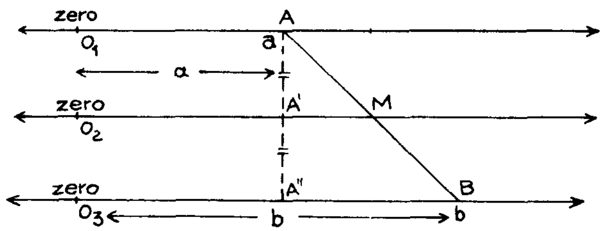
$d(O_1 A)=a$ व $d(O_3 B)=b$

$AA'' \parallel O_1O_3$

आता, $d(O_1 A)=d(O_2A')=d(O_3A'')=a$

म्हणून, $d(O_1 A)+d(O_3A'')=2d(O_2A')$.........(1)

A' हा AA'' चा मध्यबिंदू आहे.......(कारण समांतर रेषांमधील अंतर समान आहे).




आकृती 5

व $A'M \parallel A''B$.......(कारण $O_2M \parallel O_3B$)

आता, $\triangle AA''B$ मध्ये, AA'' च्या A' या मध्यबिंदूपासून त्रिकोणाची भुजा A''B ला A'M ही समांतर रेषा आहे. ही रेषा AB ला M या बिंदूत छेदते.

म्हणून, $d(A''B)=2d(A'M)$..........(2)

(1) व (2) मिळवून,

$d(O_1A)+d(O_3A'')+d(A''B)=2d(O_2A')+2d(A'M)$

परंतु, $d(O_3A'')+d(A''B)=d(O_3B)$

व $d(O_2A')+d(A'M)=d(O_2M)$

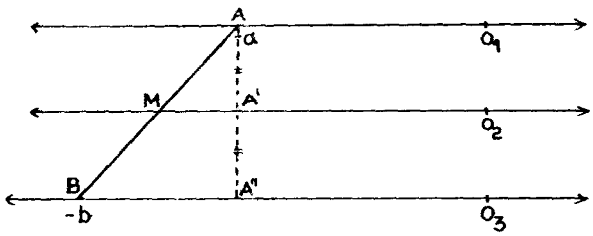
म्हणून, $d(O_1A)+d(O_3B)=2d(O_2M)$
$\therefore a + b = 2d(O_2M)$

परंतु $O_2M$ या मधल्या रेषेवरील प्रत्येक बिंदूला वरच्या $O_1A$ किंवा खालच्या $O_3B$ रेषेवरील संगत बिंदूंना दिलेल्या संख्येपेक्षा दुप्पट संख्या दिली असल्यामुळे M बिंदूवर $(a+b)$ एवढी संख्या असेल.

**विभाग 2**

**दोन ऋण संख्यांची बेरीज :**

येथे पहिल्या विभागाप्रमाणे सिद्धता करता येते. फक्त, येथे रेषांवरील A व B हे बिंदू अनुक्रमे $(-a)$ व $(-b)$ या संख्या दर्शवितात (आकृती 6 पहा).

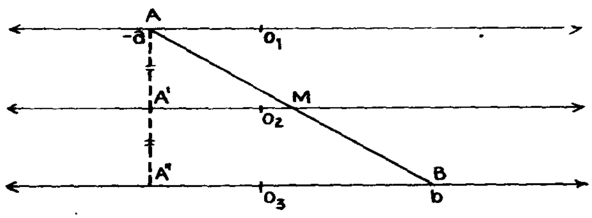



आकृती 6

**विभाग 3.**

**जेव्हा एक धन व दुसरी ऋण संख्या असते :**

(आकृती 7 पहा.)




आकृती 7

$d(O_2M)=d(A'M)-d(A'O_2)$

$=1/2d(A''B)-d(A'O_2)$......(पहिल्या विभागात दाखविल्याप्रमाणे)

$$=\frac{1}{2}[d(A''O_3)+d(O_3B)]-d(A'O_2)$$
$$=\frac{1}{2}d(A''O_3)+\frac{1}{2}d(O_3B)-d(A'O_2)$$
$$=\frac{1}{2}(a)+\frac{1}{2}(b)-a$$
$$=\frac{(-a)}{2}+\frac{(b)}{2}=\frac{(-a)+(b)}{2}$$

मधल्या रेषेवरील प्रत्येक बिंदूला वरच्या $O_1A$ किंवा खालच्या $O_3B$ रेषेवरील संगत बिंदूंना दिलेल्या संख्येपेक्षा दुप्पट संख्या दिली असल्यामुळे M बिंदूवर $(-a)+(b)$ ही संख्या येईल.

बेरजेसाठी वापरायच्या या नोमोग्राफचा उपयोग वजाबाकीसाठीही करता येईल, हे उघड आहे.

निरनिराळ्या आकडेमोडींसाठी निरनिराळे नोमोग्राफ तयार करता येतात. येथे आपण दोन गमतीच्या नोमोग्राफची उदाहरणे घेऊ. यांतील एक भौतिकीमध्ये (Physics) तर दुसरे रसायनशास्त्रात (Chemistry) उपयोगी पडू शकेल.

1. $R_1$ व $R_2$ हे दोन अवरोध समांतर मांडणीत जोडले असता त्यांचा परिणामी अवरोध (R) किती, हे काढणे:

येथे, $\frac{1}{R}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}$, हे सूत्र वापरावे लागते.

समजा तुमच्याजवळ, पुढील तक्त्यात दाखविल्याप्रमाणे, $R_1$ व $R_2$ च्या अनेक किंमती आहेत.

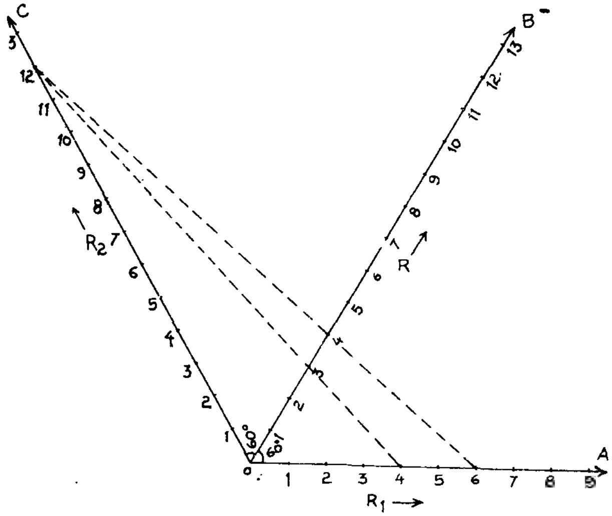
| अनुक्रमांक | $R_1$(ohms) | $R_2$(ohms) | R(ohms) |
|---|---|---|---|
| 1 | 4 | 12 | ? |
| 2 | 6 | 12 | ? |
| 3 | 5 | 8 | ? |
| ... | ... | ... | ... |
| ... | ... | ... | ... |

नेहमीची पद्धत म्हणजे, वरील सूत्र वापरून R च्या किंमती काढणे. उदाहरणार्थ,

पहिल्या निरिक्षणासाठी, $\frac{1}{R}=\frac{1}{4}+\frac{1}{12}=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$

$\therefore R=3$ ohms.

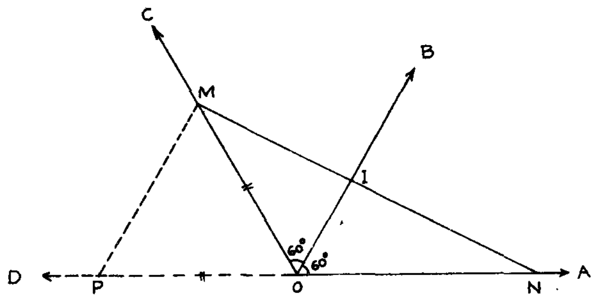
परंतु प्रत्येक वेळेस, सूत्र वापरून, ही आकडेमोड करणे कंटाळवाणे होते. कदाचित काही चुकाही होऊ शकतात. परंतु तुमच्याजवळ जर योग्य नोमोग्राफ असेल तर ही गोष्ट एकदम सोपी होते. या आकडेमोडीसाठी नोमोग्राफ काढायचा म्हणजे, आकृती 8 प्रमाणे, OA, OB व OC या तीन रेषा अशा काढायच्या की, $m\angle AOB = m\angle BOC = 60°$.




आकृती 8

(तिन्ही रेषांवर एकच स्केल घ्यायचे.) $R_1$च्या किंमती OAवर व $R_2$च्या किंमती OCवर घ्यायच्या. OA व OCवरील $R_1$ व $R_2$चे बिंदू एकमेकांना जोडणारी रेषा OBला ज्या बिंदूत छेदेल त्या बिंदूवरून R (परिणामी अवरोध) वाचता येतो. उदा., $R_1=4$ ohms व $R_2=12$ ohms हे दोन बिंदू जोडणारी रेषा OBला 3या बिंदूत छेदते. म्हणून, R=3 ohms. ज्यावेळी $R_1=6$ ohms व $R_2=12$ ohms असेल त्यावेळी R= 4 ohms येईल (आकृती 8पहा). अशा प्रकारे, $R_1$ व $R_2$दिले असता, प्रत्येक वेळी, आपल्याला त्यांच्या समांतर मांडणीचा परिणामी Rकाढता येईल.

आता ही गोष्ट आपण भूमितीच्या पद्धतीने सिद्ध करू (आकृती 9 पहा).




आकृती 9

**पक्ष:** $m\angle AOB=m\angle BOC=60°$

**साध्य:** $\frac{1}{l(OM)}+\frac{1}{l(ON)}=\frac{1}{l(OI)}$

**रचना:** AOरेषा Pपर्यंत अशी वाढवा की, l(OM)= l(OP). M व P हे बिंदू जोडा.

**सिद्धता** : $m\angle MOP=60°$

△MOPमध्ये l(OM)=l(OP).......(रचना)

$\therefore m\angle OMP=m\angle OPM=60°$... ...($\because m\angle MOP=60°$)

म्हणून, △OMP हा समभुज त्रिकोण आहे.

$\therefore$ l(MP)=l(OP)=l(OM).

आता △MPN व △ION पहा. या त्रिकोणांमध्ये,

$m\angle MPO=m\angle ION$.......(प्रत्येक कोन 60°)

$\angle INO$ हा सामाईक कोन

म्हणून उरलेले कोनही एकरूप असले पाहिजेत.

अर्थात, △MPN व △ION हे समरूप त्रिकोण आहेत.

$$\therefore \frac{l(PN)}{l(ON)}=\frac{l(PM)}{l(OI)}$$

$$\therefore \frac{l(PN)}{l(PM)}=\frac{l(ON)}{l(OI)}$$

$$\therefore \frac{l(PO)+l(ON)}{l(PM)}=\frac{l(ON)}{l(OI)}$$

$$\therefore \frac{l(OM)+l(ON)}{l(OM)}=\frac{l(ON)}{l(OI)}$$

...... [$\because$ l(PO)=l(PM)=l(OM)]

$$\therefore \frac{l(OM)+l(ON)}{l(OM)\cdot l(ON)} = \frac{1}{l(OI)}$$

$$\therefore \frac{1}{l(ON)} + \frac{1}{l(OM)} = \frac{1}{l(OI)}$$

हा नोमोग्राफ अंतर्गोल आरशासाठीही वापरता येतो. जर $R_1$ व $R_2$ या एवजी आपण OA व OC वर अनुक्रमे u (वस्तूचे आरशापासूनचे अंतर) व v (प्रतिमेचे आरशापासूनचे अंतर) दाखविले असते तर OB वरील छेदबिंदूवर आपल्याला अंतर्गोल आरशाचे नाभ्यंतर (f=focal length) वाचता आले असते (कारण, $\frac{1}{u}+\frac{1}{v}=\frac{1}{f}$). किंबहुना, $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{z}$ अशा प्रकारच्या कोणत्याही सूत्रासाठी हा नोमोग्राफ वापरता येतो.

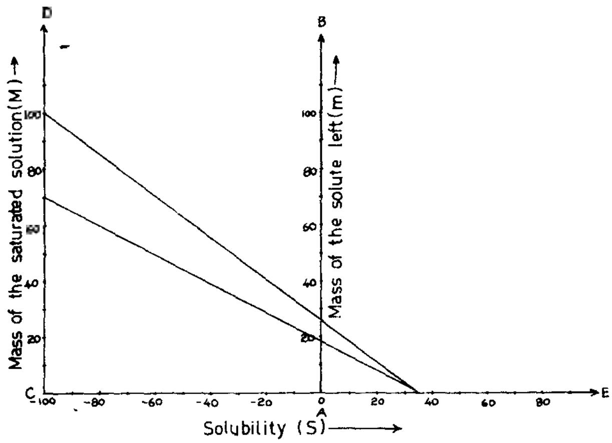
2. एखाद्या पदार्थाची विद्राव्यता (solubility) काढण्यासाठी वापरावयाचा नोमोग्राफ : विद्राव्यता म्हणजे, दिलेल्या तपमानाला 100 ग्राम द्राव (solvent) घेऊन त्यात विरघळू शकणाऱ्या द्राव्य पदार्थाचे (solute) कमाल वस्तुमान. अशा वेळी संतृप्त द्रावण (saturated solution) तयार होते. (समजा, एखाद्या तपमानाला, 100 ग्राम पाण्यात जास्तीत जास्त फक्त 'क्ष' ग्राम मीठच विरघळू शकते, तर 'क्ष' ही मिठाची, त्या तपमानाला, पाण्यातील विद्राव्यता असते.) पाण्याच्या नेहमीच्या तपमानाला एखाद्या पदार्थाची विद्राव्यता काढायची असल्यास त्या पदार्थाचे पाण्यात तयार केलेले थोडेसे संतृप्त द्रावण (saturated solution) एखाद्या बशीत घेऊन ते उघडे ठेवून देतात. सर्व पाणी उडून गेल्यावर उरलेल्या पदार्थाचे वजन करतात. हा प्रयोग निरनिराळ्या वजनाचे संतृप्त द्रावण घेऊन करतात व, प्रत्येक वेळी, शेवटी उरलेल्या कोरड्या पदार्थाचे वजन करतात. या प्रयोगाची निरिक्षणे आपण पुढील प्रकारच्या तक्त्यात नोंदवू शकतो.

| अनु-क्रमांक | संतृप्त द्रावणाचे वस्तुमान (M) | उरलेल्या द्राव्य पदार्थाचे वस्तुमान (m) | विद्राव्यता (S) |
|---|---|---|---|
| 1 | 100 ग्राम | 26 ग्राम | ? |
| 2 | 75 ग्राम | 19 ग्राम | ? |
| 3 | ... | ... | ... |
| ... | ... | ... | ... |

या निरीक्षणांवरून त्या पदार्थाची विद्राव्यता (S) काढण्यासाठी पुढील सूत्र वापरतात:

$$S = \frac{100\,m}{(M-m)}.$$

परंतु, या सूत्रावरून आकडेमोड करून उत्तर काढण्याऐवजी पुढील नोमोग्राफ (आकृती 10) वापरता येतो. या नोमोग्राफमधील M व m च्या संख्या वाचून विद्राव्यता काढता येते.

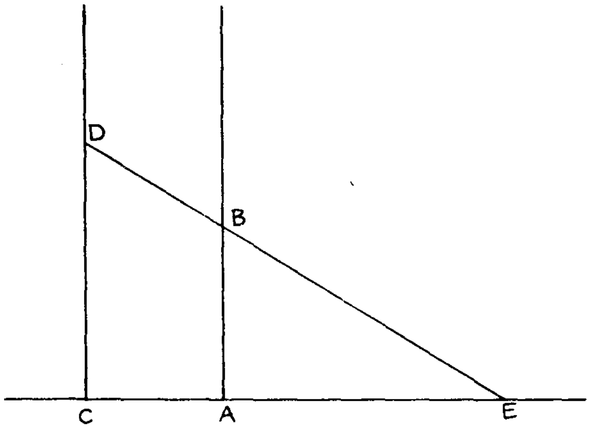



आकृती 10

या नोमोग्राफमध्ये AB, CD व CE या तीन रेषा (अक्ष) आहेत. CD व AB एकमेकांना समांतर असून हे दोन्ही अक्ष CE ला काटकोनात आहेत. CD व AB या अक्षांमध्ये 100 मिलिमीटर (10 सेमी) अंतर आहे व दोन्हीवरील स्केल 1 सेमी = 10 ग्राम, असे घेतले आहे. CE अक्षावर विद्राव्यता (S) दाखविली आहे. यासाठी, A हा आरंभबिंदू (शून्य) घेऊन त्याच्या डावी-उजवीकडे अनुक्रमे ऋण व धन संख्या घेतल्या आहेत. या CE अक्षावरही 1 सेमी = 10, असेच स्केल घेतले आहे. M च्या निरीक्षणनोंदी (ग्राममध्ये) CD वर व m च्या नोंदी (ग्राममध्ये) AB वर दाखविल्या आहेत. एका प्रयोगातील, प्रत्येक वेळच्या, M व m निरीक्षणांचे बिंदू एकमेकांना जोडून काढलेल्या रेषा CE ला एकाच बिंदूत छेदतात. या बिंदूचे वाचन करून आपल्याला लगेच विद्राव्यतेची किंमत काढता येते. आपण घेतलेल्या काल्पनिक नोंदींच्या तक्त्याप्रमाणे, CD वरील 100 ग्रामचा बिंदू व AB वरील 26 ग्रामचा बिंदू एकमेकांना जोडले असता तयार होणारी

रेषा CE अक्षाला 35 या बिंदूत छेदते (आकृती 10 पहा). तसेच, CD वरील 75 ग्राम हा बिंदू व AB वरील 19 ग्राम हा बिंदू जोडणारी रेषा CE अक्षाला त्याच बिंदूत, म्हणजे 35 येथे, छेदते. म्हणून येथे S=35 ही विद्राव्यता आहे.

आता, हा नोमोग्राफ व विद्राव्यतेचे सूत्र एकमेकांशी सुसंगत आहेत, हे आपण भूमितीने सिद्ध करू (आकृती 11 पहा).




आकृती 11.

**पक्ष:** $AB \perp CE$ व $CD \perp CE$

$l(AC)=100$

**साध्य:** $l(AE)=\dfrac{100\times l(AB)}{l(CD)-l(AB)}$

**सिद्धता :** $AB \parallel CD$...(दोन्ही रेषा CE ला लंब आहेत)

आता, $\triangle CDE$ व $\triangle ABE$ हे दोन त्रिकोण पहा.

$\angle CDE \cong \angle ABE$........(संगत कोन)

$\angle DCE \cong \angle BAE$........(दोन्ही काटकोन)

व $\angle BEA$ हा त्रिकोणांचा सामाईक कोन.

म्हणून, $\triangle CDE$ व $\triangle ABE$ हे समरूप त्रिकोण आहेत. अर्थात्, त्यांच्या संगत भुजांची गुणोत्तरे समान असली पाहिजेत.

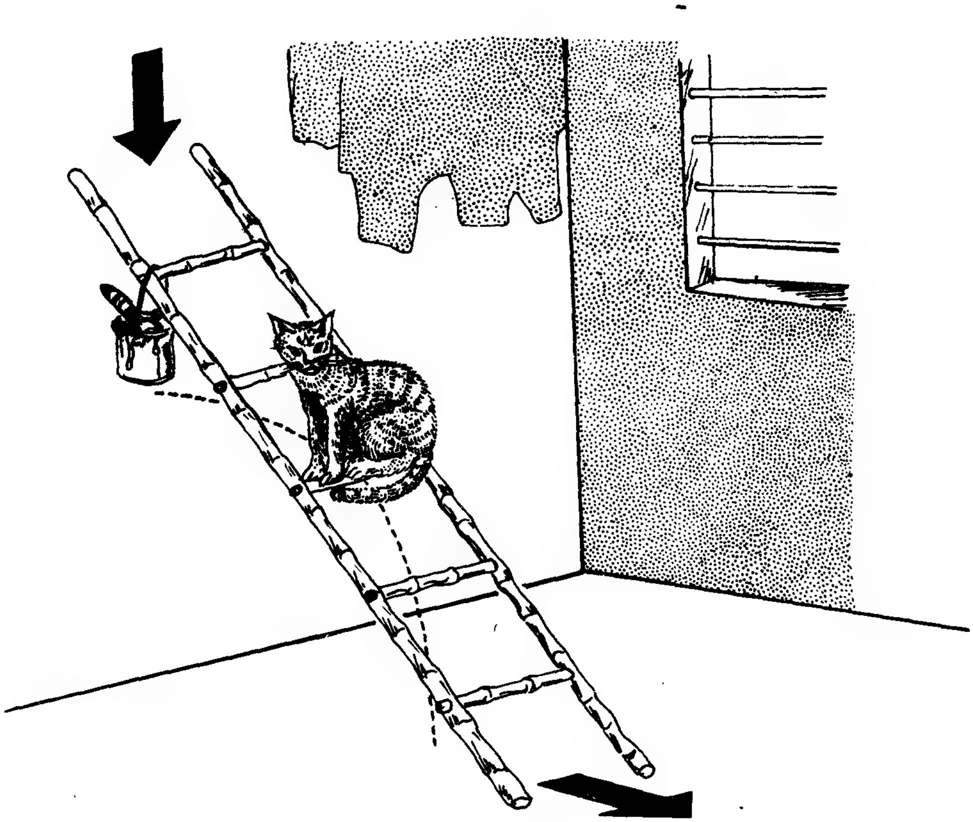
म्हणजे,
$$\frac{l(CD)}{l(AB)}=\frac{l(CE)}{l(AE)}$$
$$\therefore \frac{l(CD)}{l(AB)}=\frac{l(CA)+l(AE)}{l(AE)}$$
$$=\frac{100+l(AE)}{l(AE)}$$
$$=\frac{100}{l(AE)}+1$$
$$\therefore \frac{l(CD)}{l(AB)}-1=\frac{100}{l(AE)}$$
$$\therefore \frac{l(CD)-l(AB)}{l(AB)}=\frac{100}{l(AE)}$$
$$\therefore l(AE)=\frac{100\times l(AB)}{l(CD)-l(AB)}$$

# 15. मांजराला जे कळते ते आपल्याला...

मुंबई शहरात किंवा तुमच्या गावी तुम्ही कधीतरी जत्रेला गेला असाल. अशा वेळी, जत्रेच्या मध्यभागी डौलात फिरणाऱ्या प्रचंड चक्राने तुमचे लक्ष सहज वेधून घेतले असेल. या प्रचंड चक्रावर जोडलेल्या पाळण्यांत बसून उंच आकाशात जाऊन खाली जमिनीकडे झेपावणे आणि गरगर फिरत राहणे, हा लहानमोठ्या सर्वांचाच एक रोमांचकारक अनुभव असतो.

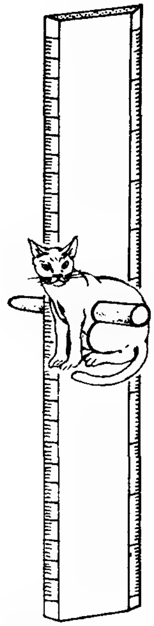
येथे मात्र आम्ही तुम्हाला चक्राविषयी काहीच सांगणार नाही. त्याऐवजी एक गोष्टच सांगण्याचे आम्ही ठरविले आहे. ही गोष्ट आहे आमच्या घरातील एका आवडत्या मनीमाऊची— मिनीची !

एकदा आमच्या घराला नवा रंग देण्याचे काम चालू होते. दिवसभर काम करून संध्याकाळी रंगारी निघून गेला होता. रोजच्याप्रमाणे आजही, जाण्याआधी, त्याने त्याची शिडी एका खोलीतल्या भिंतीला टेकवून ठेवली होती. या सर्वात गैरसोय झाली होती आमच्या मिनीची. सबंध दिवस त्या खोलीत येऊ न दिल्यामुळे मिनी चांगलीच वैतागली होती. 'आमच्या घरात

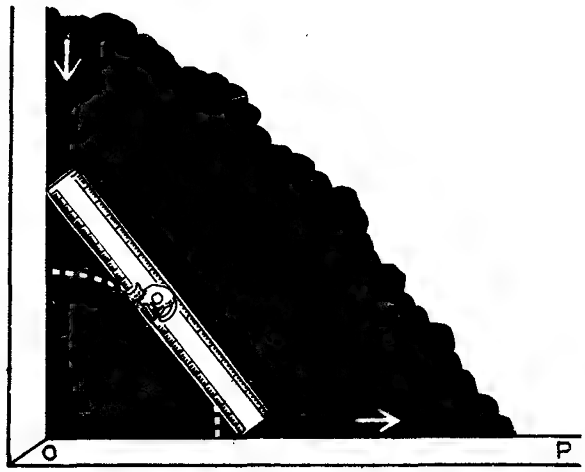


आकृती 1

आम्हालाच येऊ न देणारा हा टिक्कोजीराव रंगारी कोण ?' मिनी विचार करीत असावी. आता तो 'येडपट' माणूस निघून गेला असल्यामुळे मिनी बिनदिक्कत खोलीत शिरली आणि मोकळेपणाने इकडेतिकडे उड्या मारू लागली. दिवसभरात आत्ताच तिला, एकटीला अशी, सबंध खोली मुक्त खेळायला मिळाली होती. थोडा वेळ खेळल्यावर, त्या तंद्रीतच, मिनी शिडीवर चढली. परंतु निम्मी शिडी चढल्यावर ती तेथेच थांबली. आणखी वर चढणे कदाचित धोकादायक होईल, असे तिला वाटले की काय कुणास ठाऊक! शिडीच्या बरोबर निम्म्या उंचीवरील पायरीवर जाऊन मिनी तेथे आरामात बसली. या उंचीवरून खोलीचे दृश्य फारच गमतीदार दिसत होते. मिनी खूष झाली. पण तिचा हा आनंद फारच थोडा वेळ टिकला. शिडीचा खोडकरपणा मिनीच्या अंगाशी आला. शिडी अचानक खाली घसरू लागली व क्षणार्धात जमिनीवर येऊन दाणकन् आपटली. या आकस्मिक घटनेमुळे मिनी इतकी घाबरली की, हे सर्व होत असता, ती त्याच जागेवर खिळून राहिली – उडी मारण्याचे तिला मुळी सुचलेच नाही. कसला आवाज झाला, म्हणून मी खोलीत गेलो. बघतो तो हा प्रकार. मिनी स्तब्ध बसलेली आणि कोणत्या तरी विचारात गढलेली ! मी तिला उचलून जवळ घेतले, गोंजारले, आणि 'लागले का' म्हणून तिला कानात विचारले. परंतु मिनी माझ्याशी काहीतरी वेगळेच कुजबुजली. तुम्हाला माहीत आहे काय ते ? मला म्हणाली, की 'आत्ताच मी एक नवीन शोध लावला. शिडी घसरण्याच्या क्षण दोन क्षणांत मला चक्क 'दिसले', की मी वर्तुळाच्या एका कंसावरून खाली येत आहे. जत्रेमधल्या एखाद्या प्रचंड चक्रावर बसून खाली यावे ना, तसे वाटले मला.' हे ऐकून मला हसू येणार नाही तर काय ? माझा तिच्या बोलण्यावर विश्वास बसेना. परंतु थोडा वेळ गेल्यावर, 'कदाचित तिचे बोलणे खरेही असेल' असे मला वाटू लागले. तिच्या बोलण्यात काही तथ्य आहे का, हे पडताळून पाहण्याचे मी ठरविले. आणि ते करून पाहिल्यावर मी आश्चर्याने थक्क झालो. मिनीने खरोखरीच वर्तुळामधील केंद्रावर अचूक बाण मारला



आकृती 2




आकृती 3

होता – तिने सांगितलेली विलक्षण गोष्ट अक्षरशः खरी होती.

मिनी माझी आवडती मांजरी असल्यामुळे मी उगीचच तिला भाव देत आहे, असे तुम्हाला वाटणे स्वाभाविक आहे. परंतु, पुढील एक सोपे खेळणे तयार करून तुम्हीही मिनीच्या खरेपणाविषयी स्वतःची खात्री करून घेऊ शकाल.

एक लांब लाकडी पट्टी घ्या. (जेवढी जास्त लांब असेल तेवढे चांगले.) तिच्या मध्यभागी एक आरपार भोक पाडा. त्या भोकात खडूची एक कांडी घट्ट बसवा. या पट्टीवर एका मांजराचे चित्र असे चिटकवा, की खडूची कांडी त्या चित्राच्या पोटातून बाहेर येईल (आ. 2 पहा).

खेळणे आता तयार झाले. आता एक चौकोनी (किंवा आयताकृती) फळा घेऊन तो भिंतीवर बसवा. या फळ्यावर आपली पट्टी तिरकी उभी करा (भिंतीला शिडी उभी करून ठेवतात त्याप्रमाणे). या वेळी, पट्टीचे वरचे टोक फळ्याच्या चौकटीच्या उभ्या पट्टीला व खालचे टोक आडव्या पट्टीवर टेकलेले असेल, खडूचे आतील टोक फळ्यावर टेकलेले असेल व मांजराचे चित्र आपल्या बाजूला पुढे असेल. ही स्थिती आकृती 3 मध्ये दाखविली आहे.

आता या पट्टीचे टोक OP वरून घसरत पुढे न्या. (आकृती 3 मध्ये, पट्टी कशी घसरेल, हे दोन बाणांनी दाखविले आहे).

याच प्रकारे शिडी घसरली होती. फळ्यावर वर्तुळाचा कंस उमटेल. या वर्तुळाचा केंद्रबिंदू O असेल व त्रिज्या बरोबर पट्टीच्या लांबीच्या निम्मी असेल. प्रत्यक्ष करून पहा म्हणजे हे सहज समजेल.

वास्तविक ही गोष्ट किती विचित्र वाटते ? परंतु ती खरी आहे. भूमितीतील एक साधे उदाहरण घेऊन आपण ती सिद्ध करू शकतो.

घसरत असताना होणारी पट्टीची कोणतीही एक स्थिती घ्या. आकृती 4 मध्ये ही स्थिती दाखविली आहे. AB ही पट्टी व M हा तिचा मध्यबिंदू (जेथे मिनी बसली होती) आहे.

$l(OM)=\frac{1}{2}\,l(AB)$, हे आपणास सिद्ध करायचे आहे.

**पक्ष :** $l(AM)=l(MB)$

$m\angle AOB=90^\circ$.

**साध्य :** $l(OM)=\frac{1}{2}\,l(AB)$.

**रचना :** O व M जोडा, व MN हा OB वर लंब टाका.

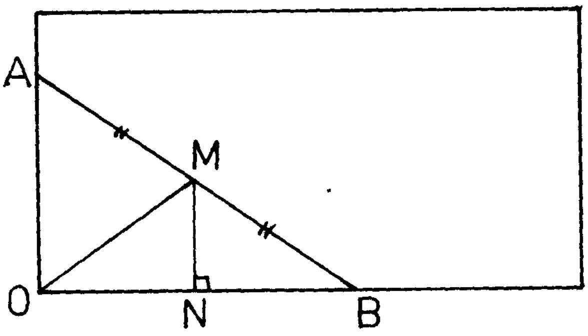
**सिद्धता :** $\because m\angle AOB=90^\circ$ (पक्ष)

व $m\angle MNB=90^\circ$ (रचना)

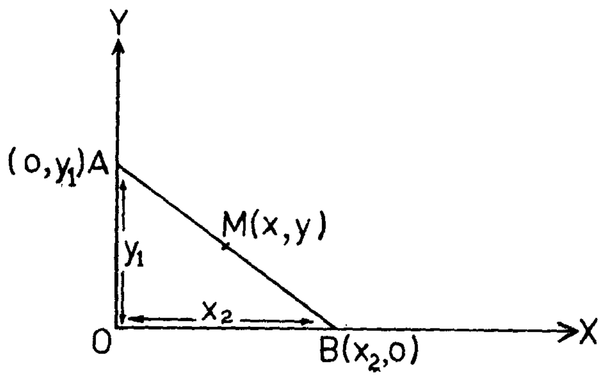
$\therefore \angle AOB \cong \angle MNB$.

परंतु, हे दोन संगत कोन आहेत. (AO व MN या रेषांना OB ही छेदिका आहे.)

संगत कोन एकरूप असल्यामुळे, AO || MN.




आकृती 4




आकृती 5

आता $\triangle AOB$ पहा. या त्रिकोणात AB या भुजेच्या मध्यबिंदूपासून MN ही रेषा AO ला समांतर आहे. म्हणून N हा OB चा मध्यबिंदू असला पाहिजे. निराळ्या शब्दांत म्हणजे, $ON \cong NB$.

(कोणत्याही त्रिकोणात एका भुजेच्या मध्यबिंदूपासून दुसऱ्या भुजेला काढलेली समांतर रेषा तिसऱ्या भुजेला दुभागते.)

आता $\triangle OMN$ व $\triangle BMN$ पहा.
$ON \cong NB$ ....... (वर सिद्ध केल्याप्रमाणे).
MN ही सामाईक भुजा
व $\angle MNO \cong \angle MNB$.......(प्रत्येक कोन, रचनेप्रमाणे, 90 अंशाचा)
म्हणून, $\triangle OMN$ व $\triangle BMN$ हे एकरूप आहेत.
$\therefore OM \cong MB$
परंतु $l(MB) = \frac{1}{2} l(AB)$......(पक्ष)
$\therefore l(OM) = \frac{1}{2} l(AB)$.

जोपर्यंत पट्टी तीच आहे तोपर्यंत तिची लांबी $l(AB)$ व म्हणून $\frac{1}{2} l(AB)$ स्थिरांक आहे. म्हणून, पट्टी घसरत असता तिचा M हा मध्यबिंदू O पासून स्थिर अंतरावर, म्हणजे पट्टीच्या लांबीच्या निम्म्या अंतरावर, सतत राहील. याचाच अर्थ, M हा बिंदू O केंद्र असलेल्या वर्तुळाचा कंस (वर्तुळखंड) गिरवील व या वर्तुळाची त्रिज्या पट्टीच्या लांबीच्या निम्मी असेल.

प्रतलीय निर्देशक भूमितीचा (Plane Co-ordinate Geometry) अगदी साधा उपयोग करूनही आपल्याला ही गोष्ट समजावून घेता येईल.

आकृती 5 पहा. AB ही पट्टीची कोणतीही एक स्थिती आहे. समजा, M या मध्यबिंदूचे निर्देशक x व y आहेत. पट्टी घसरत असता M कोणती आकृती गिरवील, ते आता आपण काढू.

जर $P(x_1, y_1)$ व $Q(x_2, y_2)$ हे दोन बिंदू एका रेषेने जोडले तर PQ रेषाखंडाच्या मध्यबिंदूचे निर्देशक $\frac{x_1+x_2}{2}$ व $\frac{y_1+y_2}{2}$ असतात, ही गोष्ट सर्वांना माहीत आहे. A, B व M बिंदूंच्या निर्देशकांचा एकमेकांशी कोणता संबंध आहे, हे आपण ही साधी गोष्ट वापरून शोधून काढू.

A बिंदू Y - अक्षावर असल्यामुळे त्या बिंदूचा x निर्देशक शून्य आहे. तसेच, B बिंदू x-अक्षावर असल्यामुळे त्या बिंदूचा y निर्देशक शून्य आहे. समजा $l(OA)=y_1$ व $l(OB)=x_2$ आहे. म्हणजेच, A बिंदूचे निर्देशक $(o, y_1)$ व B बिंदूचे निर्देशक $(x_2, o)$ आहेत.

आता $M(x, y)$ हा AB चा मध्यबिंदू असल्यामुळे,
$x = \frac{o + x_2}{2}$ व $y = \frac{y_1 + o}{2}$
किंवा $x_2 = 2x$ व $y_1 = 2y$
$\therefore x = \frac{x_2}{2}$ व $y = \frac{y_1}{2}$
आता $\triangle AOB$ मध्ये
$[l(OB)]^2 + [l(OA)]^2 = [l(AB)]^2$......(पायथॅगोरसचे प्रमेय)
$\therefore x_2^2 + y_1^2 = [l(AB)]^2$
$\therefore (2x)^2 + (2y)^2 = [l(AB)]^2$
$\therefore x^2 + y^2 = \frac{[l(AB)]^2}{4} = \left[\frac{l(AB)}{2}\right]^2$

येथे, $l(AB)$ ही पट्टीची लांबी असल्यामुळे तो स्थिरांक

आहे. म्हणजेच, वरील समीकरणातील उजवीकडील बाजू स्थिरांक आहे. आता, $x^2 + y^2 =$ स्थिरांक, हे वर्तुळाचे समीकरण असून त्या वर्तुळाचे केंद्र आरंभबिंदूशी (Origin) असते व त्याची त्रिज्या स्थिरांकाच्या वर्गमुळाएवढी (म्हणजे येथे $\frac{l(AB)}{2}$ एवढी) असते, हे सर्वांना माहीत आहे. म्हणून,पट्टी घसरताना M हा बिंदू अशा प्रकारचे वर्तुळ गिरवितो, हे सिद्ध होते.

# 16. त्रिकोणांची एकरूपता

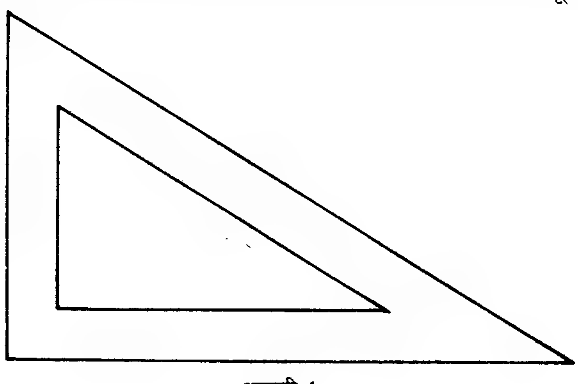
इ. 8 वी मध्ये तुम्ही त्रिकोणांच्या एकरूपतेबद्दल शिकला असाल. एकरूपतेची संकल्पना आणि त्रिकोणांच्या एकरूपतेबद्दलच्या अटी ह्या गणिताच्या अभ्यासात फार महत्त्वाच्या गोष्टी आहेत. परंतु उपयोगाच्या दृष्टीनेही या गोष्टी तितक्याच महत्त्वाच्या आहेत. त्रिकोणांच्या एकरूपतेच्या सहाय्याने भूमितीतील अनेक उदाहरणे सोडविता येतात, अनेक सत्ये सिद्ध करता येतात. पायथॅगोरस प्रमेय, आलेख, लॉगरिथम्, त्रिकोणांची समरूपता इत्यादि गोष्टींबरोबर त्रिकोणांची एकरूपताही शालेय भूमितीतील एक केंद्रस्थानीची संकल्पना आहे.

रचनाबंध ओळखणे [pattern recognition] ही भूमिती समजण्याची गुरुकिल्ली आहे. भूमितीतील अनेक प्रश्न सोडविण्यासाठी भूमितीय आकृत्यांमधील सारखेपणा समजणे आणि,निष्कर्ष काढण्यासाठी,या सारखेपणाचा उपयोग करणे, या गोष्टींची फार आवश्यकता असते. एकरूपता हा रचनाबंध ओळखण्याचा एक भाग आहे. दोन रचनाबंध सर्व तपशिलासह तंतोतंत एकमेकांप्रमाणे आहेत, असा एकरूपतेचा अर्थ आहे. या दृष्टीने, कारखान्यातून यंत्रांच्या सहाय्याने बाहेर पडणाऱ्या वस्तू एकमेकांशी एकरूप असतात, असे म्हणता येते. परंतु हाताने बनविलेल्या [हस्तकलेच्या] वस्तूंबाबत असे म्हणता येत नाही. तसेच, प्रत्येक वस्तू तिच्या स्वतःशी नेहमीच एकरूप असते.

कधी कधी, गर्भधारणा होताना, एकच मातृबीज फलित होऊन पुढे त्याचे दोन भाग होतात व दोन मुले जन्मास येतात. ही दोन जुळी मुले सर्व बाबतीत जवळजवळ सारखीच दिसतात. त्यांना एकबीज-जुळे (identical twins) म्हणतात. एकरूपतेची सर्वसाधारण कल्पना देण्यासाठी एकबीज-जुळ्याचे उदाहरण उपयोगी पडू शकते.

एकरूपता व समरूपता या दोन वेगवेगळ्या संकल्पना आहेत. त्यांच्यातील फरक ओळखायला विद्यार्थ्यांनी शिकले पाहिजे. एकबीज-जुळे हे उदाहरण जर एकरूपतेच्या जवळ जात असेल तर सहा वर्षाचा एक मुलगा व पाच वर्षांनी बघितलेला तोच मुलगा, हे उदाहरण समरूपतेचे म्हणून देता येईल. दोन वस्तू [किंवा दोन आकृत्या] समरूप आहेत, असे जेव्हा आपण म्हणतो, तेव्हा त्यांचा आकार सारखा आहे, असे आपणास म्हणावयाचे असते. अशा वेळी एक वस्तू म्हणजे दुसऱ्या वस्तूचे बृहद्रूप [मोठे किंवा विशाल रूप] असते इतकेच. एखादे चित्र जर बहिर्गोल भिंगातून पाहिले तर ते मोठे दिसते, परंतु ते मूळच्या चित्रासारखेच 'समरूप' दिसते. कंपासपेटीतील एक गुण्या [सेटस्क्वेअर] घेऊन आपण दोन त्रिकोण काढू शकतो-एक लहान व एक मोठा. हे दोन्ही त्रिकोण एकमेकांशी समरूप असतात, परंतु एकरूप नसतात. म्हणजेच, सर्व बाबतीत ते सारखे नसतात [आ. 1 पहा].

त्रिकोणांच्या एकरूपतेबाबत काय दिसते ? ही एकरूपता सिद्ध करण्यासाठी आपण काही अटी घालतो. त्यांना आपण एकरूपतेच्या अटी म्हणतो. दोन त्रिकोणांनी जर या अटी पूर्ण



आकृती 1

केल्या तर ते त्रिकोण एकरूप आहेत, असे सिद्ध होते. त्रिकोणांच्या एकरूपतेच्या अटी या, खरे म्हणजे, एका दृष्टीने, त्रिकोणाच्या एकमेवतेच्या अटी आहेत असे दिसून येईल. म्हणजे, या अटी पूर्ण केल्यावर एक आणि एकच [म्हणजे एकमेव] त्रिकोण काढता येतो.

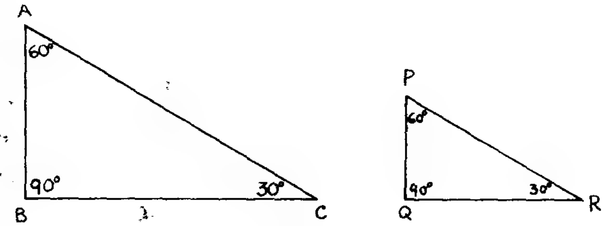
एकमेव त्रिकोण काढण्यासाठी त्या त्रिकोणासंबंधीची काही किमान माहिती हवी असते. ही माहिती जर दिलेली असेल तर तो त्रिकोण काढता येतो. एकरूपतेच्या अटी म्हणजे अशी किमान माहितीच असते.

प्रत्येक त्रिकोणाला तीन बाजू व तीन कोन असतात, हे सर्वांना माहीत आहे. उदाहरणार्थ, $\triangle ABC$ मध्ये प्रत्येक बाजूची लांबी आपण a, b व c ने, व प्रत्येक कोनाचे माप $m\angle A$, $m\angle B$, व $m\angle C$ ने दाखवितो. अर्थात या सहा राशी एकमेकींपासून स्वतंत्र नसतात; त्या एकमेकींवर अवलंबून असतात [उदा., $(a+b)>c$, $m\angle A+m\angle B+m\angle C=180°$ वगैरे]. याचा अर्थ, एक व एकच त्रिकोण काढण्यासाठी या सर्व सहा राशी माहीत असण्याची काहीच जरूरी नसते. मग यासाठी किमान किती राशी लागतात? या प्रश्नाचे उत्तर एकरूपतेच्या अटींमध्ये लपलेले आहे. वरील सहा राशींपैकी कोणत्याही दोन राशी आपणास दिल्या तर एकमेव त्रिकोण काढता येणार नाही, अनेक त्रिकोण काढता येतील, ही गोष्ट उघड आहे. तसेच, तीनपेक्षा जास्त, म्हणजे चार, पाच किंवा सहा, अशा कोणत्याही राशी दिल्या एकमेव त्रिकोण नेहमीच काढता येईल, ही गोष्टही उघड आहे. परंतु जेव्हा त्रिकोणाच्या तीनच राशी दिलेल्या असतात तेव्हा काय परिस्थिती असते ? एकमेव त्रिकोण काढता येतो का ? याचे उत्तर, कोणत्या तीन राशी दिलेल्या आहेत, यावर अवलंबून असते. कधी "हो" तर कधी "नाही" असे उत्तर येते. म्हणूनच एकरूपतेच्या संदर्भात त्रिकोणाच्या तीन राशींसंबंधी विवेचन करावे लागते.

त्रिकोणाच्या बाजू व कोन यांची सर्व प्रकारची त्रिकुटे घेऊन आपण हे विवेचन करू शकतो. कोनाला आपण A व बाजूला S म्हणू. अशा वेळी, A व S चे आपल्याला चार गट करता येतात :

(1) AAA (2) SSS (3) AAS (4) ASS

(1) AAA: याचा अर्थ त्रिकोणाचे तिन्ही कोन दिलेले आहेत. समजा तुम्हाला $m\angle A=60°$, $m\angle B=90°$ व $m\angle C=30°$ $(m\angle A+m\angle B+m\angle C=180°)$ दिले व त्रिकोण काढायला सांगितला तर एक व एकच त्रिकोण काढता येईल का ? याचे उत्तर अर्थात "नाही" असे येईल. हेच तीन कोन असलेले त्रिकोण तुम्ही हवे तेवढे काढू शकाल. हे सर्व त्रिकोण समरूप असतील, परंतु एकरूप असणार नाहीत, एकमेव असणार नाहीत [आ. 2 पहा]. याच कारणामुळे आपण असे म्हणतो की, $\triangle ABC$ व $\triangle PQR$ मध्ये जरी $m\angle A=m\angle P$, $m\angle B=m\angle Q$, $m\angle C=m\angle R$ असले तरी ते त्रिकोण एकरूप नाहीत [समरूप आहेत].

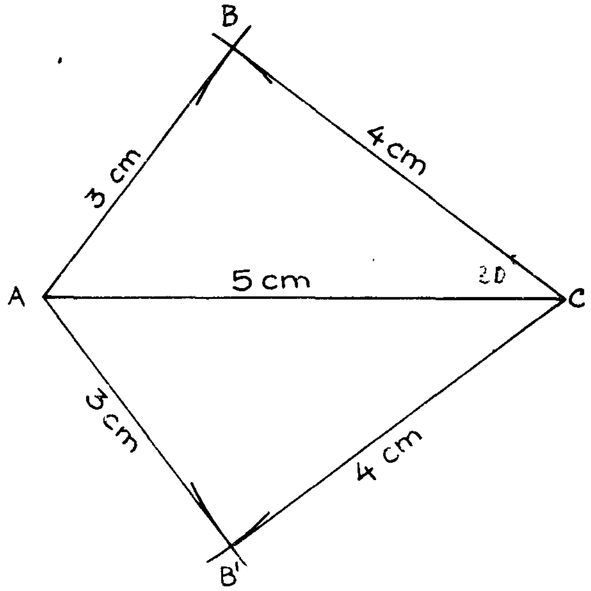


आकृती 2

(2) SSS: त्रिकोणाच्या जर तिन्ही बाजू दिल्या असतील [अर्थात, कोणत्याही दोन बाजूंची बेरीज तिसऱ्या बाजूपेक्षा जास्त असायला हवी, ही अट पूर्ण करून] तर एकमेव त्रिकोण नेहमीच काढता येतो. उदा., जर $\triangle ABC$ मध्ये $a=4$ सेमी, $b=5$ सेमी, व $c=3$ सेमी असेल तर कंपास व पट्टीच्या सहाय्याने आपण तो त्रिकोण नेहमीच काढू शकू.

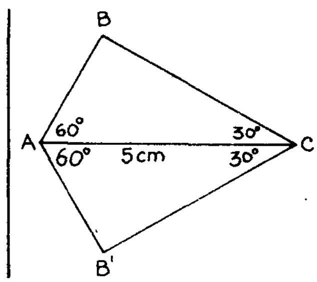
अर्थात, अशा वेळी दोन त्रिकोण, $\triangle ABC$ व $\triangle AB'C$ [आ. 3 पहा], काढता येतात. परंतु हे दोन्ही त्रिकोण एकमेकांशी तंतोतंत जुळणारे असतात. म्हणजेच ते एकरूप असतात. त्रिकोणाच्या तिन्ही बाजू दिल्यावर एकमेव त्रिकोण काढता येत असल्यामुळे SSS ही त्रिकोणांच्या एकरूपतेची अट ठरते.

(3) AAS, ASA किंवा SAA: येथे, प्रत्येक ठिकाणी, त्रिकोणाचे कोन व एक बाजू दिली आहे. दोन कोन दिल्यावर तिसरा कोनही आपोआप माहीत होतो, ही गोष्ट येथे दडलेली आहे. याचा अर्थ, त्रिकोणाचे तिन्ही कोन व एक बाजू, अशा चार राशी येथे, प्रत्यक्ष जरी नाही तरी अप्रत्यक्ष रीत्या, दिल्या आहेत. आणि ज्या अर्थी कोणत्याही चार राशींमुळे त्रिकोण एकमेवतेने सिद्ध होतो, त्या अर्थी AAS, ASA किंवा SAA




आकृती 3

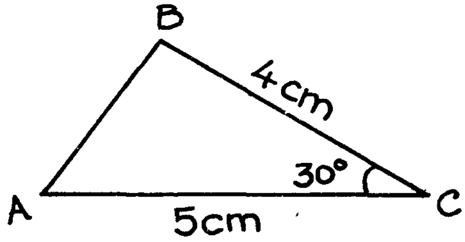
या त्रिकोणांच्या एकरूपतेच्या अटी ठरतात. उदा., △ABC मध्ये जर b=5सेमी, m∠ A=60°व m∠ C=30°असेल तर आपल्याला △ABC व △AB′C हे सर्व बाबतीत सारखे असलेले दोन त्रिकोण काढता येतात [आ. 4पहा]. म्हणजेच, येथे एक व एकच त्रिकोण काढता येतो.




आकृती 4

(4) SAS किंवा ASS:

[अ] SAS: त्रिकोणाच्या दोन बाजू व त्यांच्यामधील समाविष्ट कोन जर दिला असेल तर तो त्रिकोण नेहमीच काढता येतो. उदा., △ABC मध्ये जर a=4 सेमी, b=5 सेमी व m∠ C=30° असेल तर △ABC नेहमीच काढता येतो. (प्रथम 5 सेमी लांबीची AC ही रेषा काढा. C पाशी 30° चा कोन करणारी रेषा काढा. C पासून कंपासने 4 सेमी त्रिज्या घेऊन ही रेषा B मध्ये छेदा. B बिंदू A ला जोडा [आ. 5 पहा].)



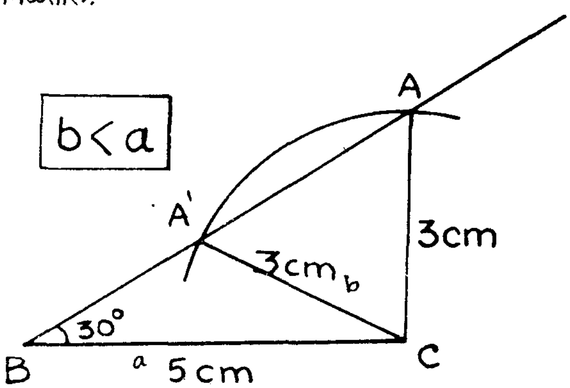

आकृती 5

म्हणजे, SAS ही त्रिकोणांच्या एकरूपतेची अट आहे.

[ब] ASS: हे त्रिकूट फार मजेशीर आहे. परंतु त्याचबरोबर ते दुर्लक्षितही आहे. बऱ्याच पाठ्यपुस्तकांतून या त्रिकुटाला अस्पृश्याची वागणूक दिली जाते. त्याला काय सांगायचे आहे, याकडे कुणी नीट लक्ष देत नाही. म्हणून आपण त्याला भेटून त्याचे मनोगत विचारू या.

समजा, △ABC मध्ये l(BC)=a, l(AC)=b व m∠B=θ या तीन राशी दिल्या आहेत. आपण त्यांच्या सहाय्याने त्रिकोण काढण्याचा प्रयत्न करू. a व b च्या संदर्भात दोन शक्यता निर्माण होतात: $b < a$ किंवा $b \nless a$.

(1) जर b<a असेल तर आपल्याला दोन त्रिकोण मिळतात.समजा, b=3 सेमी, a=5 सेमी व m∠ B=30°, तर आपल्याला आकृती 6 मध्ये दाखविल्याप्रमाणे दोन त्रिकोण मिळतील.




आकृती 6

△ABC व △A′BC मध्ये,

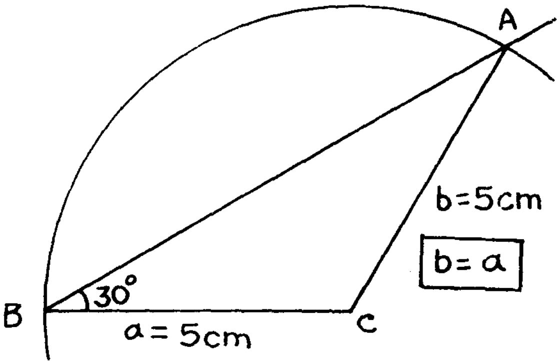
∠ B हा सामाईक कोन

∠ BC ही सामाईक बाजू

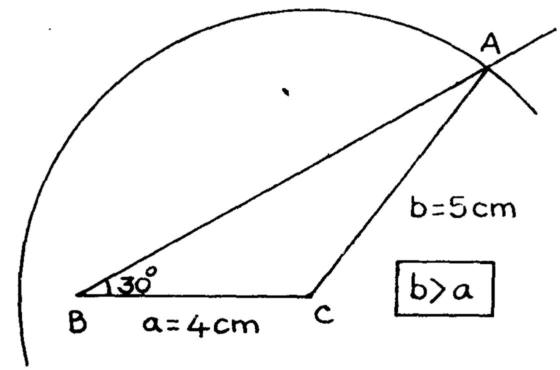
व l(AC)=l(A′C)

असूनही $\triangle ABC$ व $\triangle A'BC$ हे त्रिकोण एकरूप नाहीत; ते सर्वस्वी भिन्न आहेत. म्हणून, $b<a$ असताना ASS ही एकरूपतेची अट होत नाही. आता $b \nless a$ असताना काय होते ते पाहू.

(2) $b \nless a$: b जर a पेक्षा कमी नसेल तर $b=a$ किंवा $b>a$. यापैकी कोणत्याही परिस्थितीत एकमेव त्रिकोण काढता येतो. [आ. 7 व 8 पहा].




आकृती 7




आकृती 8

आकृती 7 मध्ये, $b=a=5$ सेमी व $\theta=30°$

आकृती 8 मध्ये, $b=5$ सेमी, $a=4$ सेमी व $\theta=30°$.

म्हणून, ASS या त्रिकुटाला जर न्याय द्यायचा झाला तर असे म्हटले पाहिजे की, ज्यावेळी त्रिकोणाच्या दोन बाजू व एक, त्यांच्यामध्ये समाविष्ट नसलेला, कोन दिलेला असतो त्यावेळी, दिलेला कोन जर लहान बाजूच्या विरुद्धचा कोन नसेल तर, तो त्रिकोण नेहमी एका व एकाच स्वरूपात काढता येतो. म्हणून येथेही आपल्याला त्रिकोणांच्या एकरूपतेची अट सापडते. ती अशी : जर $\triangle ABC$ व $\triangle PQR$ मध्ये

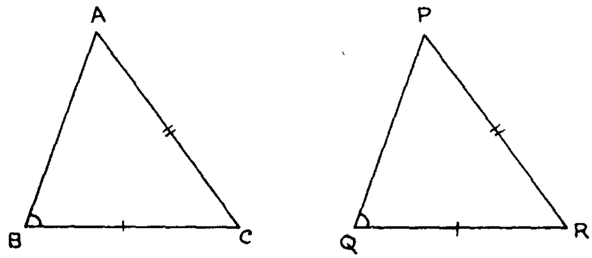
$l(BC)=l(QR)$

$l(CA)=l(RP)$

$m\angle B=m\angle Q$

व $l(AC) \nless l(BC)$

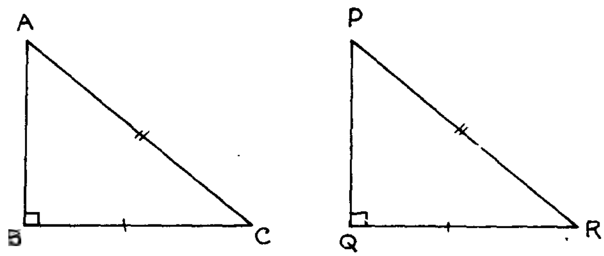
तर $\triangle ABC \cong \triangle PQR$ [आ. 9 पहा].




आकृती 9

पाठ्यपुस्तकात काटकोन त्रिकोणांच्या एकरूपतेची अट दिलेली असते. दोन काटकोन त्रिकोणांमध्ये जर कर्ण व कोणत्याही दोन बाजू एकरूप असतील तर ते त्रिकोण एकरूप असतात. वर सांगितलेली अट ही या विशिष्ट अटीचे सामान्यीकरण (generalization) आहे, ही गोष्ट येथे लक्षात घेतली पाहिजे.

काटकोन त्रिकोणामध्ये कर्ण ही तिन्ही बाजूंत मोठी बाजू असते [आ. 10 पहा]. $\triangle ABC$ व $\triangle PQR$ मध्ये जर $l(BC)=l(QR)$, $l(AC)=l(PR)$ व $m\angle B=m\angle Q=90°$ तर $\triangle ABC \cong \triangle PQR$...... [कारण $l(AC) \nless l(BC)$].




आकृती 10

या अटीवरून आपण विशालकोन त्रिकोणांचाही विचार करू शकतो. $\triangle ABC$ विशालकोन त्रिकोणामध्ये $\angle B$ या

विशालकोनाच्या विरुद्ध असलेली AC ही बाजू तिन्ही बाजूंमध्ये सर्वात मोठी असते. अर्थात, $l(AC) \nless l(BC)$ ही अट येथे आपोआप पूर्ण होते. म्हणून, दोन विशालकोन त्रिकोणांमध्ये जर विशालकोन सारखे असतील व एका त्रिकोणाच्या कोणत्याही दोन बाजू दुसऱ्या त्रिकोणाच्या बाजूंशी एकरूप असतील तर ते त्रिकोण एकरूप असतात.

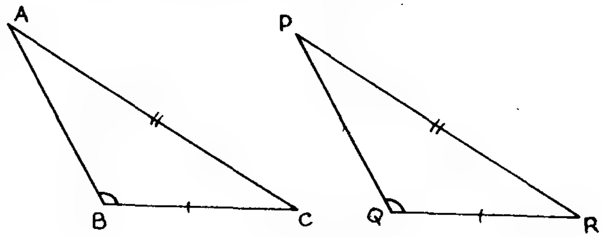
उदा., $\triangle ABC$ व $\triangle PQR$ मध्ये

जर $l(BC)=l(QR)$

$l(AC)=l(PR)$

व $m\angle B=m\angle Q>90^\circ$

तर $\triangle ABC \cong \triangle PQR$ [आ. 11 पहा].




आकृती 11

# 17. गणितातील काही इंग्रजी संज्ञांचा जन्म

विज्ञानाप्रमाणे गणितातही आपला अनेक संज्ञांशी परिचय होतो. हे शब्द तांत्रिक असल्यामुळे आपल्याला अवघड वाटतात. उदाहरणार्थ, समीकरण, $\pi$ वगैरे शब्दांचा अर्थ आपल्याला लगेच समजत नाही. अशाच प्रकारच्या काही संज्ञा निर्माण कशा झाल्या, याच्या मनोरंजक जन्मकथा आपण या प्रकरणात थोडक्यात पाहणार आहोत.

(1) Calculation (आकडेमोड) : आकडेमोडीला इंग्रजीत कॅल्क्युलेशन म्हणतात. अंकगणितात आपण सतत आकडेमोड (बेरीज, वजाबाकी, गुणाकार, भागाकार इत्यादि) करीत असतो. अंकगणितात आपली पहिल्यांदा ओळख होते ती पूर्ण संख्यांशी. 1, 2, 3,.....वगैरेंना पूर्ण संख्या किंवा नैसर्गिक संख्या म्हणतात. या संख्यांची निकड पूर्वीच्या काळी माणसाला का वाटली असेल ? त्याच्या पदरी अनेक गुरेढोरे असत. संध्याकाळी रानातून परतताना यातील एखादे इकडेतिकडे निघून तर गेले नसेल ना, हा प्रश्न त्याला सारखा पडत असला पाहिजे. परंतु, म्हणून त्याला लगेच काही 1, 2, 3,...हे आकडे सुचले नाहीत. मग काय करीत असेल तो ? गुरे मोजण्याची त्याची एक खास तऱ्हा होती. सकाळी गुरे सोडताना, दरवाजातून एक जनावर बाहेर पडले की तो एका मडक्यात एक दगड टाकायचा. याउलट संध्याकाळी गुरे परत आल्यावर, ती गोठ्यात सोडताना, तो एका जनावरापाठीमागे एक दगड मडक्यातून काढून घ्यायचा. शेवटी जर मडके रिकामे झाले तर हिशेब बरोबर जमला आणि कुणी हरवले नाही याबद्दल त्याची खात्री व्हायची. (यामध्ये 1, 2, 3,......वगैरे आकड्यांचा, मोजणीसाठी, उपयोग केलेला नसायचा, हे येथे लक्षात घेणे महत्त्वाचे आहे.) ज्या दगडांचा गुरे मोजण्यासाठी उपयोग व्हायचा त्या दगडांना जुने रोमन लोक कॅल्क्युली (calculi) असे म्हणायचे. लॅटिन भाषेमध्ये लहान गुळगुळीत दगडाला किंवा गारगोटीला कॅल्क्युलस (calculus) असा शब्द आहे. यावरून पुढे आकडेमोडीसाठी कॅल्क्युलेशन हा शब्द रूढ झाला.

(2) टॅली (Tally) : 'टॅली'ला आपण मराठीत ताळा असे म्हणतो. (ताळा या शब्दाशीच पडताळा (verification) हा शब्द संबंधित आहे.) एखादे गणित किंवा समीकरण सोडविल्यावर आपले उत्तर बरोबर आहे किंवा नाही, यासाठी आपण काही आकडेमोड करतो. त्याला आपण ताळा असे म्हणतो. टॅली (ताळा) हा शब्द कसा निर्माण झाला असेल ?

इंग्रजी भाषेत शिंप्याला टेलर (tailor) म्हणतात. तुम्हाला कदाचित आश्चर्य वाटेल, की टॅली हा शब्द टेलर या शब्दाशी निगडित आहे.

वर्षानुवर्षे तुरुंगात शिक्षा भोगणारा कैदी त्याच्या सुटकेच्या दिवसाची जीव लावून वाट पाहत असतो. किती दिवस शिल्लक राहिले, याची त्याला अतिशय उत्सुकता लागून

राहिलेली असते. मग तो काय करतो ? जाणाऱ्या प्रत्येक दिवसाची एक खूण तो तुरुंगाच्या भिंतीवर कोरून ठेवतो. यामुळे, अजून किती दिवस बंदिवास उरला याची त्याला पूर्ण कल्पना येते. याचप्रमाणे, पुरातन काळी, पैसे, गुरेढोरे इत्यादींची मोजदाद ठेवण्यासाठी माणसे एखाद्या झाडाच्या खोडावर किंवा फांदीवर रेघा कोरून ठेवीत असत. या फांदीला 'टॅली' आणि रेघा कोरण्याला 'टॅली ठेवणे' असे म्हणत असत. या टॅलीवरून पैसे किंवा गुरे किती आहेत, याची निश्चित महिती व्हायची. (फ्रेंच भाषेत 'कापणे' या शब्दाला tailler असा शब्द आहे.) Tailler वरून इंग्रजीत Tailor (टेलर) हा शब्द आला. (जो कापतो तो टेलर.)

(3) अल्‌जिब्रा (algebra): 'अल्‌जिब्रा' म्हणजे मराठीत 'बीजगणित'. मोहंमद इब्न मुसा अल्-ख्वारझ्मी नावाचा एक अरबी गणिती पूर्वी होऊन गेला. एरल् समुद्राच्या दक्षिणेला 'खिवा' नावाचा पर्शिया देशातील एक इलाखा आहे. या इलाख्याला पूर्वी 'ख्वारझम्' म्हणत असत. अल्-ख्वारझ्मीचा जन्म या भागात झाला. तो काही काळ बगदादमध्ये राहत असे. तो भारतात येऊन गेला होता व त्यावेळचे भारतीय ज्ञानविज्ञान त्याने चांगले आत्मसात केले होते. भारतीय अंकपद्धतीवर एक ग्रंथ लिहून त्याने ही पद्धत पाश्चात्यांपर्यंत पोचविली होती. त्याने हिसाब अल्-जाब्र वल्-मुकाबला (Hisab al-jabr wal-muqabalah) या अरबी नावाचा एक ग्रंथ लिहिला. अल्‌जिब्रा (किंवा बीजगणित) या विषयावर अरबी गणितज्ञाने लिहिलेला हा पहिला ग्रंथ. वरील अरबी शीर्षकाचा अर्थ 'अनेक अज्ञात राशींचा संयोग करून, माहीत असलेल्या राशीबरोबर त्या जुळविणे' असा होतो. या शीर्षकातील अल्-जाब्र हा शब्द घेऊन 'अल्‌जिब्रा' हा शब्द तयार झाला. 'अल्‌जिब्रा' म्हणजे 'एकत्र आणणे'.

(4) $\pi$: कोणत्याही वर्तुळामध्ये

$$\frac{\text{वर्तुळाचा परीघ (किंवा परिमिती)}}{\text{वर्तुळाचा व्यास}}$$

ही राशी स्थिरांक असते, ही गोष्ट पूर्वीच्या काळी ग्रीकांना माहीत होती. या स्थिरांकाला त्यांनी $\pi$ (पाय) अशी संज्ञा दिली. इंग्रजी भाषेत 'periphery' असा एक शब्द आहे. मराठीत आपण त्याला 'परिधी' किंवा 'परिसर' (म्हणजे केंद्रापासून लांबचा भाग) म्हणू शकतो. ग्रीक भाषेत याच अर्थाचा 'peripheria' असा शब्द आहे. या शब्दातील p हे पहिले अक्षर घेऊन pi किंवा $\pi$ हा शब्द निर्माण केला गेला असावा, असे मानले जाते.

येथे एक गोष्ट लक्षात घेतली पाहिजे. वर्तुळाचा परीघ व व्यास यांचे गुणोत्तर म्हणजे $\pi$, अशी जरी व्याख्या असली तरी $\pi$ ही अपरिमेय संख्या (irrational number) आहे. $\pi$ ची किंमत अगदी अचूकपणे $\frac{22}{7}$ किंवा 3.1416 असते, हे म्हणणे बरोबर नाही. $\frac{22}{7}$ किंवा 3.1416 या परिमेय संख्या (rational numbers) आहेत. मग $\pi$, जी मुळात अपरिमेय आहे, या परिमेय संख्यांइतकी कशी असेल ? अर्थातच, $\pi$ ची अचूक किंमत $\frac{22}{7}$ किंवा 3.1416 असणे शक्य नाही. या सर्व संख्या $\pi$ च्या अदमासे किंमती आहेत.

# 18. कोनाचे त्रिभाजन

ख्रिस्तपूर्व 5 व्या शतकाच्या आसपासचा काल मनुष्याच्या वैचारिक व सांस्कृतिक इतिहासातील एक दैदीप्यमान काल होता. या कालात हिमालयासारख्या उत्तुंग प्रतिभेची माणसे, जवळजवळ एकाच वेळी, पृथ्वीवर निरनिराळ्या ठिकाणी होऊन गेली — ग्रीसमध्ये पायथॅगोरस, पर्शियामध्ये झोरॅस्टर, भारतदेशात बुद्ध व महावीर आणि चीनमध्ये कॉन्फ्युशिअस व लाओ-त्से ! दीडदोनशे वर्षांचा हा कालखंड या विभूतींच्या असामान्य व्यक्तित्वांनी झळाळून निघाला. काही अभ्यासकांना या कालखंडात मानवी इतिहासातील पहिल्या प्रबोधनकालाचे दर्शन होते. या महात्म्यांच्या अलौकिक कामगिरीमुळे एका बाजूला मानवी ज्ञानसंचयात महत्त्वाची भर पडली तर दुसऱ्या बाजूला विश्व व मानवी जीवन यासंबंधीच्या दृष्टिकोनाला एक

नवे परिमाण लाभले. या क्रांतिकारी योगदानाचे स्वरूप, निखळ बौद्धिक निर्मितीपासून मनुष्याच्या साक्षात पूर्णत्वापर्यंत, सर्वंकष अशा प्रकारचे होते. ज्यांचे सखोल आणि साक्षेपी चिंतन करावे अशा अेनक मौलिक संकल्पना आणि अंतर्भेदी आशय या काळात जन्माला आले. मात्र, या प्रकरणात, आपण त्यांतील फक्त एकच प्रश्न विवेचनाला घेणार आहोत. इतर प्रश्नांप्रमाणे या प्रश्नानेही त्यावेळच्या सर्जनशील व्यक्तींना झपाटून टाकले होते.

खरे म्हणजे, खिस्तपूर्व 5 व्या शतकातील तत्त्वचिंतकांसमोर तीन प्रचंड आव्हाने होती. ही आव्हाने म्हणजे गणितातील तीन महाप्रश्न होते.

(1) वर्तुळाचा चौरस बनविणे : दिलेल्या वर्तुळाच्या क्षेत्रफळाएवढ्या क्षेत्रफळाचा चौरस तयार करणे

(2) घनाचे (cube) आकारमान (volume) दुप्पट करणे : दिलेल्या घनाचे जेवढे आकारमान असेल त्याच्या दुप्पट आकारमान असलेला घन तयार करणे

(3) कोनाचे तीन समान भाग [त्रिभाजन] करणे : दिलेल्या कोनाचे तीन समान भाग करण्याची भूमितीय कृती शोधून काढणे

[या सर्व कृतींसाठी फक्त कंपास व सरळ कडा (straight-edge) यांचाच वापर करायचा, अशी अट होती.] यांतील तिसऱ्या प्रश्नाचा आपण येथे विचार करणार आहोत.

प्रथम शालेय भूमितीच्या संदर्भात आपण या प्रश्नाचा विचार करू. या दृष्टीने, पार्श्वभूमी म्हणून, शाळेत शिकविल्या जाणाऱ्या काही कृतींचा प्रथम उल्लेख करणे योग्य ठरेल. उदाहरणार्थ, इ. 8 वी मध्ये आपण भूमितीतील पुढील दोन कृती शिकतो. या कृती, अर्थात, केवळ कंपास व सरळ कडा वापरून पूर्ण करायच्या असतात.

(1) दिलेल्या कोनाचे दुभाजन करणे
(2) दिलेल्या रेषाखंडाचे, हवे असतील तेवढे, समान भाग करणे

या दोन्ही कृती सोप्या असून विद्यार्थ्यांना त्यात कोणतीच अडचण येत नाही. कोनाचे तीन सारखे भाग करणे ही गोष्ट, वरवर पाहता तरी, कोनाच्या दुभाजनाचीच पुढची पायरी वाटते. यामुळे त्रिभाजनाचे हे काम सोपेच असले पहिजे, अशी एकदम समजूत होते.

प्रत्यक्षात, कोनाच्या त्रिभाजनाचा प्रश्न काही विद्यार्थ्यांना व शिक्षकांना विचारला तेव्हा त्यांनाही तो फार सोपा आहे असे वाटले. सामान्यतः दोन कृती यासाठी सुचविल्या गेल्या :

[अ] $\angle AOB$ हा कोन दिला आहे [आ. 1 पहा]. प्रथम $\angle AOB$ चे दुभाजन करून $\angle AOC$ व $\angle COB$ हे दोन समान कोन मिळवा. ही कृती सर्वांना माहीत असते. यानंतर $\angle COB$ चे दोन समान भाग करा, म्हणजे $\angle COD$ व $\angle DOB$ हे दोन कोन मिळतील. $\angle COD$ चे पुन्हा दोन समान भाग करा, म्हणजे $\angle COE$ व $\angle EOD$ हे दोन कोन मिळतील. म्हणजे येथे, एकानंतर एक अशा प्रकारे कोनाच्या दुभाजनाचीच कृती वापरली आहे. एकदम असे वाटते की, $m\angle EOB = \frac{1}{3}(m\angle AOB)$. यामुळे, आपण कोनाचे त्रिभाजन करण्यात सफल झालो अशी समजूत होते. परंतु ही समजूत चुकीची असते, हे पुढीलप्रमाणे सिद्ध करता येते.

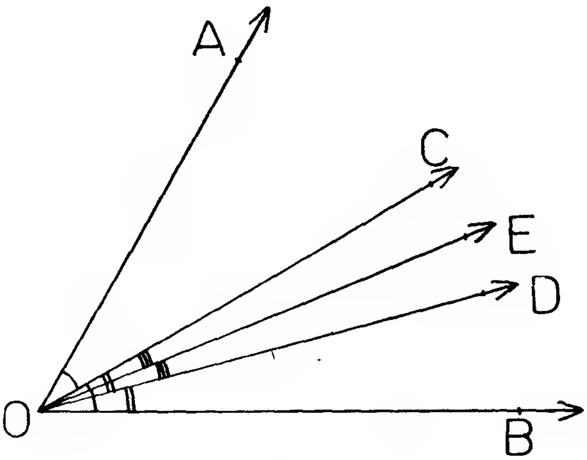
$$m\angle DOB = \frac{1}{2}(m\angle COB) = \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}(m\angle AOB) = \frac{1}{4}(m\angle AOB)$$

$$m\angle EOD = \frac{1}{2}(m\angle COD) = \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}(m\angle COB) = \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}(m\angle AOB) = \frac{1}{8}(m\angle AOB)$$

आता, $m\angle EOB = (m\angle EOD)+(m\angle DOB)$
$$= \frac{1}{8}(m\angle AOB)+\frac{1}{4}(m\angle AOB) = \frac{3}{8}(m\angle AOB)$$

$$\therefore m\angle EOB \neq \frac{1}{3}(m\angle AOB)$$

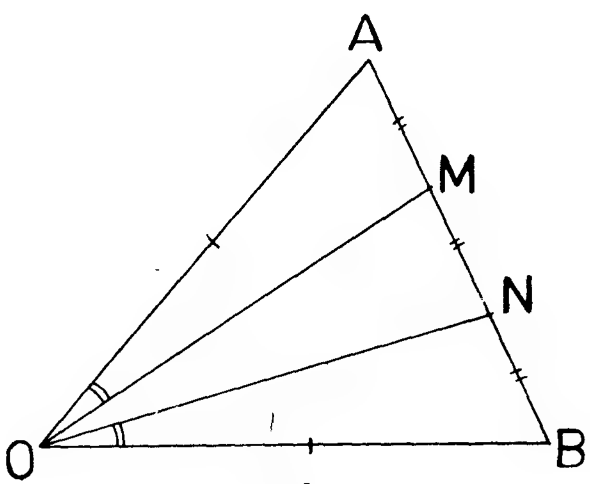
[ब] दिलेल्या $\angle AOB$ कोनाच्या दोन भुजांवर कंपासने $l(OA)= l(OB)$ मापून घ्या [आ. 2 पहा]. A व B जोडा. AB या रेषाखंडाचे तीन समान भाग पाडा. [दिलेल्या



आकृती 1

रेषाखंडाचे समान भाग करण्याची कृती माहीत असल्यामुळे हे सहज शक्य होते.] AB रेषाखंडावर M व N हे दोन बिंदू येतील. $l(AM)=l(MN)=l(NB)$. O ला M व N जोडा. एकदम असे वाटते की, AB रेषाखंडाचे तीन समान भाग पाडल्यामुळे $\angle AOM$, $\angle MON$ व $\angle NOB$ हे तीन कोन एकरूप आहेत. म्हणजेच, $m\angle AOM = m\angle MON = m\angle NOB = \frac{1}{3}(m\angle AOB)$.

परंतु ही समजूतही चुकीची आहे, हे सहज लक्षात येते. प्रत्यक्ष मोजमापावरून कळते की,
$m\angle AOM = m\angle NOB$,
परंतु $m\angle MON \neq m\angle AOM$ [किंवा $m\angle NOB$]



आकृती 2

[$\triangle AOM \cong \triangle NOB$. परंतु $\triangle MON$ हा $\triangle AOM$ शी (किंवा $\triangle NOB$ शी) एकरूप नाही.]

यावरून, कोनाच्या त्रिभाजनाचा प्रश्न वाटतो तितका सोपा नाही, हे ध्यानात येते. किंबहुना,वर उल्लेखिलेल्या कालखंडात [ख्रिस्तपूर्व 5 वे शतक], जेव्हा भूमिती बाल्यावस्थेत होती तेव्हा, अनेक नामवंत गणितज्ञांनी हा प्रश्न सोडविण्यासाठी भगीरथ प्रयत्न केले. यासाठी अनेक पद्धतींचा त्यांनी उपयोग केला. परंतु सर्व व्यर्थ ठरले. या सर्व खडतर साधनेने एकच गोष्ट त्यांच्या लक्षात आली,की हा प्रश्न अतिशय जटिल व गुंतागुंतीचा आहे. त्या कालखंडाच्या इतिहासातील काही पानांचा मागोवा घेणे कदाचित येथे मनोरंजक ठरेल.

पूर्वीचे रसायनतज्ज्ञ एका लोकविलक्षण रसायनाच्या मागे होते, ही गोष्ट सर्वश्रुत आहे. या रसायनामुळे सर्व धातूंचे सुवर्णात रूपांतर करता येईल व माणसालाही अमरत्व लाभेल, असा त्यांचा विश्वास होता. हा प्रयत्न अर्थात पूर्णपणे असफल ठरला. तरीही या परिश्रमांतून रसायनशास्त्राचा पाया रचला गेला. तसेच, पायथॅगोरिअन कुलाचीही अशी समजूत होती की, गणितातील संख्यांना दैवी ज्ञान उपलब्ध करून देण्याची शक्ती आहे. या श्रद्धेच्या जोरावर त्यांनी संख्यांचे अनेक,थक्क करणारे, गुणधर्म शोधून काढले. तरीही संख्यांचे दैवी स्वरूप त्यांना कधीही उलगडून दाखविता आले नाही. मात्र,हे अपयश पदरी येत असताही, त्यांच्या प्रयत्नांमुळे संख्यांच्या उपपत्तीला भरघोस योगदान लाभले. बाल्यावस्थेत असलेल्या भूमितीच्या बाबतीतही हेच घडले. ख्रिस्तपूर्व 5 व्या शतकातील अशक्य प्रश्नांची उत्तरे शोधण्याच्या अपयशी प्रयत्नांतून भूमितीचे शास्त्र मात्र विकसित होत गेले.

गोष्ट अशी घडली, की या कालात अथेन्स नावाच्या ग्रीसमधील एका मोठ्या शहरात प्लेगची साथ आली. रोगाची साथ परमेश्वरी कोपामुळे येते, अशी त्यावेळी एक समजूत होती. अर्थात, कोणता देव कोपला आहे आणि त्याला काय कारण झाले, याची उत्सुकता सर्व लोकांना लागून राहिली. ग्रीसमध्ये त्यावेळी डेल्फी येथे अपोलो या देवाचे एक देऊळ होते. हे स्थान जागृत असून तेथे पुण्यवान माणसाच्या मुखाने देव बोलतो, अशी लोकांची श्रद्धा होती. सर्व लोक साहजिकच डेल्फीला अपोलो मंदिराजवळ जमले. तेथे त्यांना सांगण्यात आले की, 'अपोलो हाच देव रागावला आहे,कारण त्याच्यापुढे असलेली शुद्ध सुवर्णाची,भरीव, घन आकाराची वेदी त्याला दुप्पट करून

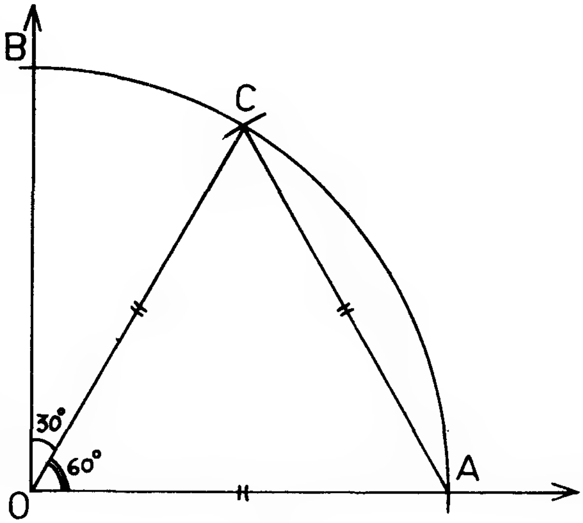
हवी आहे.' देवाची ही इच्छा शमली की रोगराई संपूर्णपणे निघून जाईल, हे ओघाने आलेच.

दिलेल्या घनाकृती ठोकळ्याचे रूपांतर दुप्पट आकारमानाच्या घनात कसे करायचे, हा त्या काळातील एक झपाटणारा प्रश्न होऊन बसला. आश्चर्याची गोष्ट म्हणजे हा प्रश्न आजतागायत सोडविता आलेला नाही. आधी सांगितल्याप्रमाणे, हा प्रश्न व दुसरे दोन, म्हणजे वर्तुळाचा चौरस बनविणे व कोनाचे त्रिभाजन करणे, असे हे तीन प्रश्न म्हणजे त्यावेळचे गूढ त्रिकूट होते. अर्थात, या सर्व कृतींसाठी फक्त कंपास व सरळ कडा यांचाच वापर करायचे बंधन होते. गेल्या 19 व्या शतकाच्या शेवटी असे सिद्ध झाले की, केवळ कंपास व सरळ कडा वापरून हे प्रश्न सोडविणे तत्वतः, व म्हणून प्रत्यक्षातही, अशक्य आहे. परंतु योग्य साधने जर वापरली तर मात्र यातील प्रत्येक कृती सुलभपणे सिद्ध करता येते. तरीही, पूर्वीच्या काळापासून ग्रीक गणिती व त्यांचे वारस यांनी सतत जवळजवळ 2200 वर्षे या प्रश्नांशी झटापट करण्यात घालविली. त्यांना त्यात अपयश आले ही गोष्ट निराळी. परंतु हे प्रदीर्घ प्रयत्न वाया गेले, असे मात्र म्हणता येणार नाही. भूमितीविषयाच्या विकासात त्यांच्याकडून अतिशय मूलभूत भर पडली, यात बिलकूल शंका नाही.

किंबहुना, केवळ कंपास व सरळ कडा वापरून काही विशिष्ट कोनांचे त्रिभाजन कसे करायचे, यांच्या पद्धती ग्रीकांनी शोधून काढल्या होत्या. उदा., कोन जर 90°, 180° किंवा 45° असेल तर त्याचे त्रिभाजन करणे सहज शक्य होते.

[अ] काटकोनाचे त्रिभाजन : $\angle$ AOB हा काटकोन आहे [आ. 3 पहा]. O हे केंद्र घेऊन व कोणतीही त्रिज्या घेऊन एक वर्तुळ काढा. हे वर्तुळ कोनाच्या भुजांना A व B मध्ये छेदेल. आता A हे केंद्र घेऊन व तेवढीच त्रिज्या घेऊन दुसरा कंस काढा. हा कंस पहिल्या वर्तुळाला C येथे छेदेल. [C बिंदू $\angle$ AOB कोनाच्या आतील भागात येईल.] C व O जोडा. $m\angle COB = \frac{1}{3}\, m\angle AOB$, हे आपण सिद्ध करू शकतो.

**सिद्धता** : C व A जोडा. $\triangle$COA हा समभुज त्रिकोण आहे
[कारण $l(OA) = l(OC) = l(CA)$........कृतीवरून]
म्हणून $m\angle AOC = 60°$.
परंतु, $m\angle COB = (m\angle AOB) - (m\angle AOC)$
$= (90°) - (60°) = 30° = \frac{1}{3}\,(m\angle AOB)$.

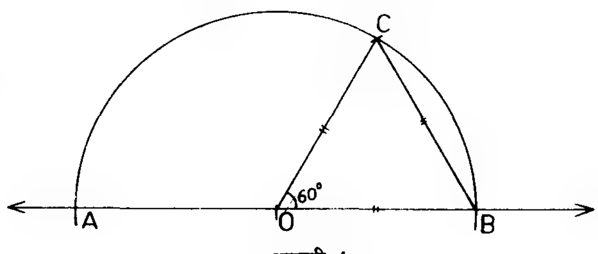


आकृती 3

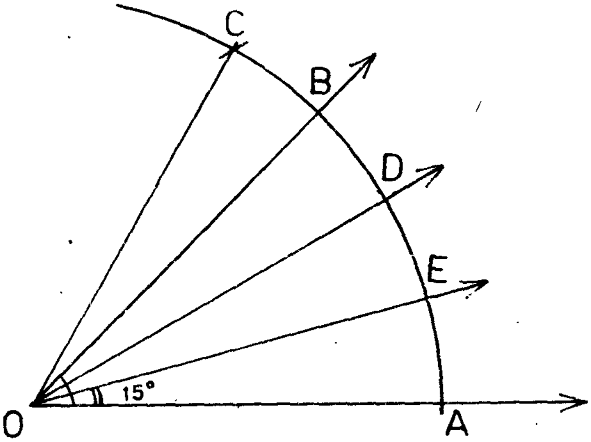
[ब] 180° माप असलेल्या कोनाचे त्रिभाजन : आकृती 4 मध्ये $m\angle AOB = 180°$.
O हे केंद्र घेऊन व कोणतीही त्रिज्या घेऊन एक अर्धवर्तुळ काढा. हे वर्तुळ कोनाच्या भुजांना B व A येथे छेदेल ($l(OA) = l(OB)$). आता B हे केंद्र घेऊन व तेवढीच त्रिज्या घेऊन एक कंस काढा. हा कंस वर्तुळाला C येथे छेदेल. C व O जोडा. $m\angle COB = \frac{1}{3}\, m\angle AOB$.

**सिद्धता** : $\because l(OB) = l(OC) = l(CB)$
$\therefore \triangle$BOC हा समभुज त्रिकोण आहे.
$\therefore m\angle COB = 60° = \frac{1}{3}\,(180°) = \frac{1}{3}\,(m\angle AOB)$.

[क] 45° माप असलेल्या कोनाचे त्रिभाजन : आकृती 5 मध्ये $m\angle AOB = 45°$. O हे केंद्र घेऊन व कोणतीही त्रिज्या घेऊन एक वर्तुळ काढा. हे वर्तुळ कोनाच्या भुजांना A व B मध्ये छेदेल ($l(OA) = l(OB)$). आता A हे केंद्र घेऊन व तेवढीच त्रिज्या घेऊन एक कंस काढा. हा कंस वर्तुळाला C या



आकृती 4




आकृती 5

ठिकाणी छेदेल. [C हा बिंदू $\angle$ AOB च्या बाहेरील भागात येईल.] C व O जोडा. $\angle$ AOC चा कोनदुभाजक काढा. [याची रीत तुम्हाला माहीत आहे.] OD हा $\angle$ AOC चा कोनदुभाजक आहे. यानंतर पुन्हा $\angle$ AOD चे दुभाजन करा. OE हा $\angle$ AOD चा कोनदुभाजक आहे.

$m\angle AOE = \frac{1}{3}(m\angle AOB)$, हे सिद्ध करता येईल.

**सिद्धता** : $\triangle OAC$ हा समभुज त्रिकोण आहे (कृतीवरून).

$\therefore m\angle AOC = 60°$

आता, $m\angle AOE = \frac{1}{2}(m\angle AOD)$

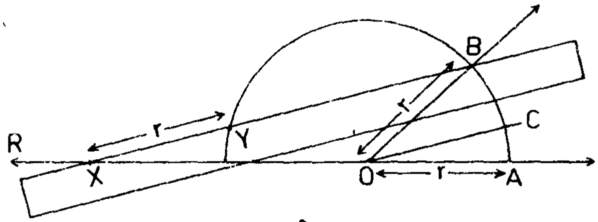
$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}(m\angle AOC)$$

$$= \frac{1}{4} \times (60°) = 15° = \frac{1}{3} \times (45°) = \frac{1}{3}(m\angle AOB)$$

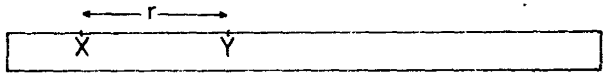
परंतु, अशा प्रकारच्या विशिष्ट यशामध्ये ग्रीक गणिती समाधानी नव्हते. कोणत्याही कोनाचे त्रिभाजन करता येईल अशी रीत शोधून काढण्याचा त्यांचा प्रयत्न होता. अर्थात, आधी सांगितल्याप्रमाणे, या प्रयत्नात ते अपयशी ठरले.

(1) कोणत्याही कोनाचे त्रिभाजन करण्याची एक रीत आर्किमिडीज या ग्रीक गणितज्ञाने शोधून काढली. मात्र यासाठी, कंपासबरोबर, कागदाची एक पट्टी वापरावी लागते.

**कृती:** समजा $\angle$ AOB हा कोन दिला आहे [आ. 6 पहा]. प्रथम O हे केंद्र घेऊन व कोणतीही त्रिज्या घेऊन एक अर्धवर्तुळ काढा. आपण या त्रिज्येला 'r' म्हणू. हे वर्तुळ कोनांच्या भुजांना



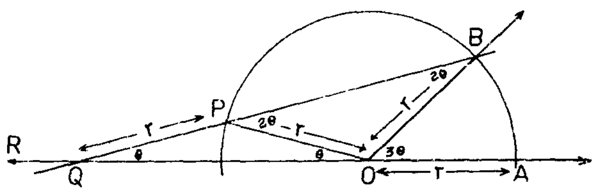

आकृती 6




आकृती 7

A व B मध्ये छेदेल. AO ही रेषा लांब R पर्यंत वाढवा.

यानंतर कागदाची एक पट्टी कापा आणि तिच्या एका कडेवर X व Y हे दोन बिंदू घ्या. या दोन बिंदूंमधील अंतर वर्तुळाच्या त्रिज्येएवढे, म्हणजे 'r' एवढे, ठेवा. ही पट्टी आकृती 7 मधल्याप्रमाणे असेल. आता ही पट्टी आकृती 6 वर अशी ठेवा, की पट्टीची कड B मधून जाईल व त्याच वेळी पट्टीवरील Y हा बिंदू (P या ठिकाणी) वर्तुळावर पडेल व X बिंदू OR रेषेवर Q येथे येईल [आ. 8 पहा]. म्हणजे, B, P व Q हे बिंदू एका रेषेत असतील आणि $l(PQ) = l(XY) = r$ असेल. B, P व Q हे बिंदू जोडणारी रेषा काढा. $m\angle OQB = \frac{1}{3}(m\angle AOB)$ हे सहज सिद्ध करता येईल. [$\angle$ AOB च्या प्रत्यक्ष त्रिभाजनासाठी, $\angle$ OQB शी एकरूप असलेला $\angle$ AOC तुम्ही सहज काढू शकाल. दिलेल्या रेषेवर दिलेला कोन कसा काढायचा, याची रीत सर्व विद्यार्थ्यांना माहीत असते.]




आकृती 8

**सिद्धता** : (आकृती 8 पहा.)

समजा, $m\angle OQB = \theta$. [$\angle OQP = \theta$, हे उघड आहे.]

$\triangle PQO$ मध्ये, $l(PQ) = l(PO) = r$

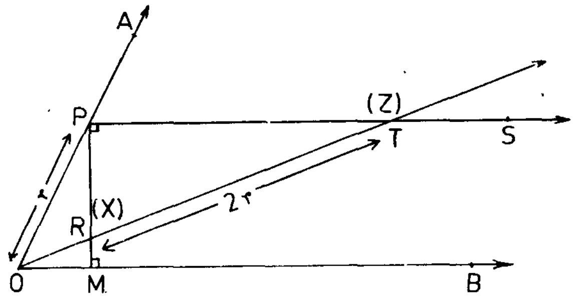
म्हणून $m\angle POQ = m\angle OQP = \theta$

आता $\angle$ OPB हा $\triangle PQO$ चा बाह्यकोन आहे.

म्हणून $m\angle OPB = m\angle POQ + m\angle OQP = \theta + \theta$
$= 2\theta$
तसेच, $\triangle OPB$ मध्ये, $l(OP) = l(OB) = r$
म्हणून $m\angle OBP = m\angle OPB = 2\theta$
आत्ता $\angle AOB$ हा $\triangle BQO$ चा बाह्यकोन आहे.
म्हणून $m\angle AOB = m\angle OQB + m\angle OBQ = \theta + 2\theta$
$= 3\theta$.
$\therefore m\angle OQB = \theta = \frac{1}{3}(m\angle AOB)$.

यानंतर, कोनाचे त्रिभाजन करण्याच्या आणखी काही पद्धती पाहू.

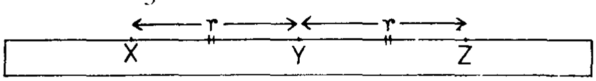
[2] कोनाच्या त्रिभाजनाची पुढील पद्धत अभियांत्रिकीमध्ये वापरतात :



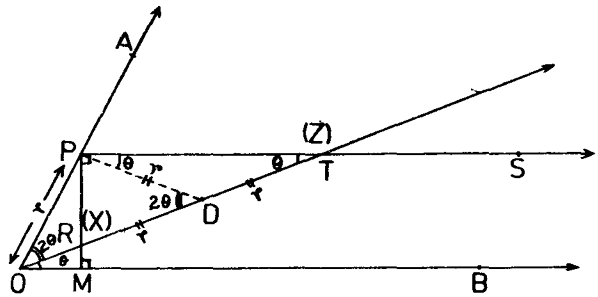
आकृती 9

**कृती:** समजा, $\angle AOB$ हा कोन दिला आहे [आ. 9 पहा].

OA वर P हा कोणताही एक बिंदू घ्या. PS ही OB ला समांतर रेषा काढा, व PM हा OB वर लंब काढा. म्हणजे, $PS \parallel OB$ व $PM \perp OB$. यानंतर, आधीच्या पद्धतीप्रमाणे, कागदाची एक पट्टी घ्या. या पट्टीच्या एका कडेवर X, Y व Z हे तीन बिंदू असे घ्या की, $l(XY) = l(YZ) = l(OP)$ [आ. 10 पहा]. अर्थात, $l(XZ) = 2\ l(OP)$. आता ही पट्टी आकृती 9 वर अशी ठेवा की, पट्टीची कड O बिंदूतून जाईल व त्याच वेळी पट्टीवरील Z हा बिंदू PS रेषेवर येईल [PS वरील या छेदबिंदूला आपण T म्हणू] व पट्टीवरील X हा बिंदू PM रेषेवर येईल [PM वरील या छेदबिंदूला आपण R म्हणू]. म्हणजेच, या ठिकाणी, O, R व T हे तीन बिंदू एका रेषेत असतील व $l(RT) = 2\ l(OP)$. O, R व T हे तीन बिंदू जोडा. $m\angle TOB = \frac{1}{3}(m\angle AOB)$, हे सहज सिद्ध करता येईल.



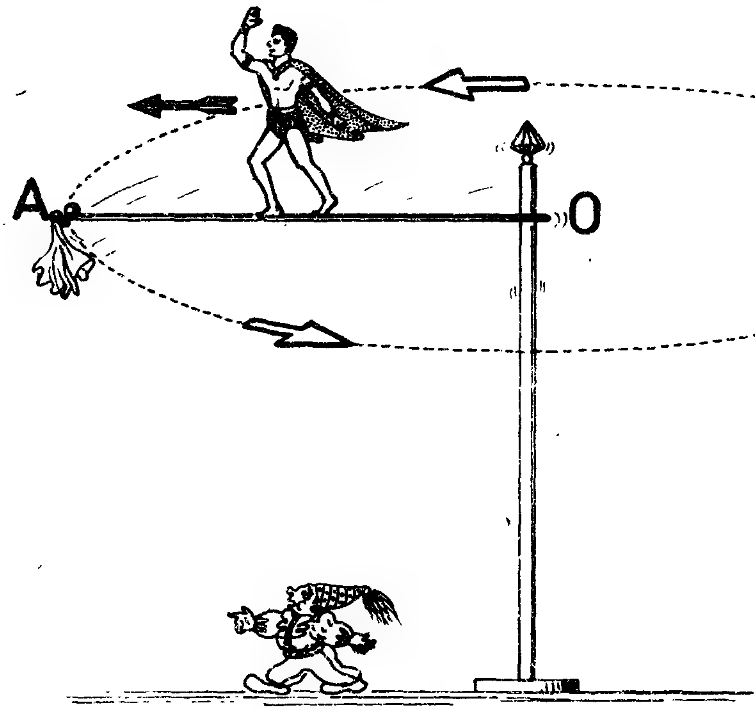
आकृती 10



आकृती 11

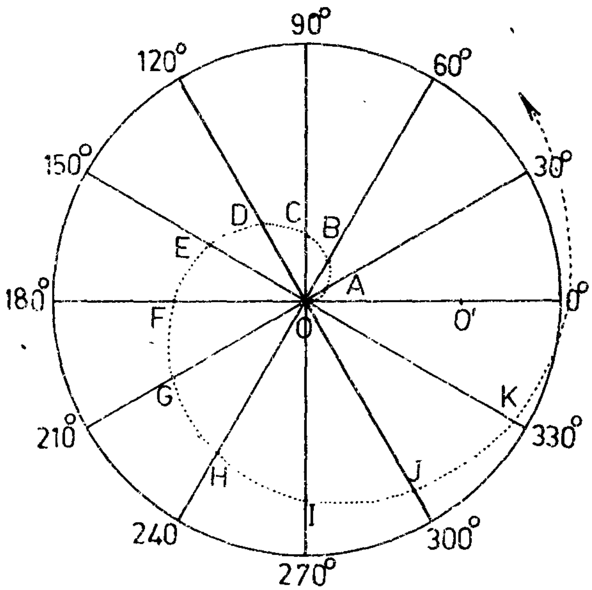
**सिद्धता :** D हा RT रेषाखंडाचा मध्यबिंदू घ्या. D व P जोडा [आ. 11 पहा].

$l(RD) = l(DT) = l(OP)$.
$\because PS \parallel OB$ आणि PM ही त्यांची छेदिका आहे,
$\therefore m\angle TPM + m\angle PMB = 180°$.... [आंतरकोनांची बेरीज]
$\therefore m\angle TPM + 90° = 180°$.......[$\because PM \perp OB$]
$\therefore m\angle TPM = 90°$.
म्हणून, $\triangle PRT$ हा काटकोन त्रिकोण आहे व RT हा त्याचा कर्ण आहे.
तसेच, PD ही कर्णाविरुद्धच्या शिरोबिंदूतून कर्णावर टाकलेली मध्यगा आहे.
$\therefore l(PD) = \frac{1}{2}\ l(RT) = l(OP)$ [काटकोन त्रिकोणामध्ये कर्णाविरुद्धच्या शिरोबिंदूतून कर्णावर टाकलेल्या मध्यगेची लांबी कर्णाच्या लांबीच्या निम्मी असते. याची सिद्धता या प्रकरणाच्या शेवटी दिली आहे.]
$\therefore l(PD) = l(RD) = l(DT)$.
समजा, $m\angle TOB = \theta$
$\therefore m\angle PTD = \theta$ ...[कारण $\angle TOB$ व $\angle PTD$ हे आंतरव्युत्क्रम कोन आहेत.]
$\therefore m\angle DPT = m\angle PTD = \theta$....[कारण $\triangle PDT$ हा समद्विभुज त्रिकोण आहे.]
परंतु, $m\angle PDO = m\angle DPT + m\angle PTD$.... ($\angle PDO$ हा $\triangle PDT$ चा बाह्यकोन आहे.)
$\therefore m\angle PDO = \theta + \theta = 2\theta$
परंतु $m\angle POD = m\angle PDO = 2\theta$ [कारण $\triangle POD$ हा समद्विभुज त्रिकोण आहे.]
$\therefore m\angle AOB = m\angle POD + m\angle TOB$
$= 2\theta + \theta = 3\theta$
$\therefore m\angle TOB = \theta = \frac{1}{3}(3\theta) = \frac{1}{3}(m\angle AOB)$.




आकृती 12

सर्कशीतला कसरतपटू आणि विदूषक




आकृती 13

आर्किमिडीज सर्पिल काढण्याची रीत

[3] आर्किमिडीज सर्पिल (Archimedean Spiral) वापरून कोनाचे त्रिभाजन :

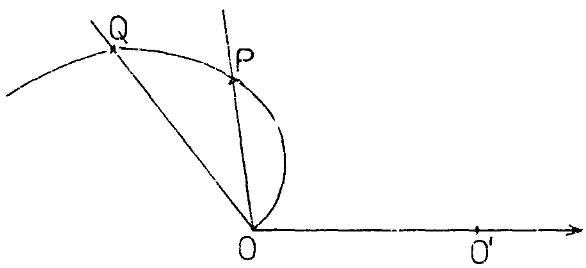
प्रथम ही सर्पिल कशी असते व ती कशी तयार करता येते ते पाहू. आकृती 12 मध्ये दाखविलेले सर्कशीतील एक दृश्य पहा. उभ्या आसावर बसविलेल्या चाकाच्या केंद्राशी सर्कशीतील कसरतपटू उभा राहतो. या चाकाला केंद्रापासून कडेपर्यंत एक भक्कम फळी बसविलेली असते. चाकाच्या खाली, खांबापाशी, विदूषक उभा राहतो. यानंतर हे चाक सुसम गतीने गरगर फिरू लागते. कसरतपटू फळीवरून सुसम गतीने केंद्रापासून कडेच्या दिशेने चालू लागतो व त्याच वेळी, खाली जमिनीवर उभा असलेला विदूषक, प्रत्येक वेळी, आपण सर्कसपटूच्या बरोबर खाली राहू याची दक्षता घेतो. विदूषकाला ज्या मार्गाने जावे लागते तो मार्ग म्हणजे आर्किमिडीजची सर्पिल असते.

ही सर्पिल तुम्ही पुढील कृतीप्रमाणे सहज काढू शकाल.

O केंद्र घेऊन एक मोठे वर्तुळ काढा [आकृती 13 पहा]. या वर्तुळाचे 12 समान भाग करा. [12 च भाग केले पाहिजेत

असे नाही. तुम्ही कितीही भाग करू शकता.] वर्तुळावर 0°, 30°, 60°,.....330° हे कोनांचे अंक लिहा. यासाठी 0°कोनाची OO′ ही रेषा संदर्भरेषा म्हणून घेता येईल. आता 30° रेषेवर OA एवढा एक छोटा रेषाखंड घ्या. समजा, OA=a ,यानंतर, 60° रेषेवर OB=2a एवढा रेषाखंड, 90° रेषेवर OC=3a एवढा रेषाखंड इत्यादि घेऊन A, B, C,......वगैरे सर्व बिंदू एका सफाईदार वक्र रेषेने (smooth curve) जोडा. ही वक्र रेषा म्हणजे आर्किमिडीज सर्पिल असेल, तिचा आरंभबिंदू O असेल व OO′ ही संदर्भरेषा असेल.

या सर्पिलचा विशेष गुणधर्म म्हणजे, तिच्यावर जर P व Q हे कोणतेही दोन बिंदू घेतले तर पुढील सूत्र खरे ठरते :



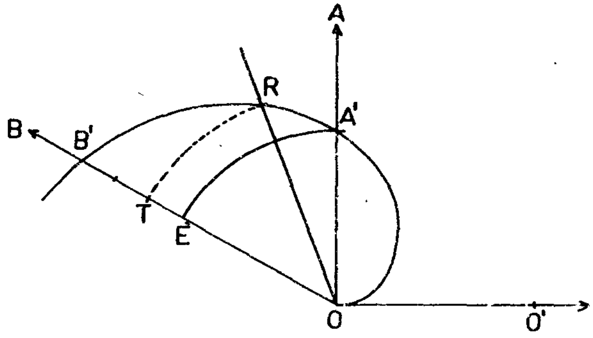
आकृती 14

$$\frac{l(OP)}{m\angle O'OP} = \frac{l(OQ)}{m\angle O'OQ}$$ [आ. 14 पहा]

OO′ ही अर्थात संदर्भरेषा आहे. हाच गुणधर्म आपण वेगळ्या प्रकारे मांडू शकतो. जर $l(OP)=r$ व $m\angle O'OP=\theta$ असेल, तर $\frac{r}{\theta}$ = स्थिरांक = K [समजा]

म्हणजेच, $r=K\theta$ हे सर्पिलचे समीकरण येते.
आता या सर्पिलचा उपयोग करून कोनाचे त्रिभाजन कसे करायचे ते पाहू.

समजा ∠ AOB या कोनाचे त्रिभाजन करायचे आहे [आ. 15 पहा]. हा कोन [कापून] आर्किमिडीज सर्पिलवर अशा तऱ्हेने ठेवा की, कोनाचा O हा शिरोबिंदू सर्पिलच्या आरंभबिंदूवर येईल व OA आणि OB या कोनाच्या भुजा सर्पिलला A′ व B′ मध्ये छेदतील. [OO′ ही सर्पिलची संदर्भरेषा आहे.] आता O हे केंद्र व l(OA′) ही त्रिज्या घेऊन एक कंस काढा. हा कंस OB′ ला E बिंदूत छेदेल (l(OA′)=l(OE)). यानंतर EB′ या रेषाखंडाचे तीन समान भाग करा. [ही रीत तुम्हाला माहीत आहे.] समजा,



आकृती 15

$l(ET)=\frac{1}{3}\, l(EB')$. आता O हे केंद्र व l(OT) ही त्रिज्या घेऊन एक कंस काढा. हा कंस सर्पिलला R बिंदूत छेदेल (l(OT)=l(OR)). R हा बिंदू O ला जोडा.
$m\angle AOR = \frac{1}{3}(m\angle AOB)$, हे सिद्ध करता येईल.

**सिद्धता** : A′ R व B′ हे बिंदू सर्पिलवर असल्यामुळे,

$$\frac{l(OA')}{m\angle O'OA'} = \frac{l(OB')}{m\angle O'OB'} = \frac{l(OR)}{m\angle O'OR} = K$$

आता,
$l(EB') = l(OB') - l(OE)$
$= l(OB') - l(OA')$...(कारण $l(OA')=l(OE)$)
$= K(m\angle O'OB') - K(m\angle O'OA')$
$= K(m\angle O'OB' - m\angle O'OA')$
$= K(m\angle A'OB')$

$\therefore \frac{1}{3} l(EB') = \frac{1}{3} K(m\angle A'OB')$

$\therefore l(ET) = \frac{1}{3} K(m\angle A'OB')$ ....... (कारण $l(ET)=\frac{1}{3} l(EB')$)

$\therefore l(OT) - l(OE) = \frac{1}{3} K(m\angle A'OB')$

परंतु, $l(OT)=l(OR)$ व $l(OE)=l(OA')$

$\therefore l(OR) - l(OA') = \frac{1}{3} K(m\angle A'OB')$

$\therefore K(m\angle O'OR) - K(m\angle O'OA')$
$= \frac{1}{3} K(m\angle A'OB')$ [सर्पिलच्या समीकरणावरून]

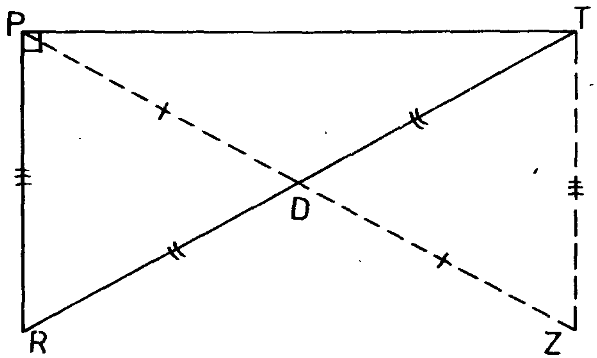
$\therefore K(m\angle O'OR - m\angle O'OA')$
$= \frac{1}{3} K(m\angle A'OB')$

$\therefore m\angle A'OR = \frac{1}{3}(m\angle A'OB')$.

म्हणजे, अर्थातच, $m\angle AOR=\frac{1}{3}(m\angle AOB)$.

[4] कोनांच्या त्रिभाजनासाठी घड्याळ हे एक उत्तम साधन आहे, हे तुम्हाला माहीत आहे का? जेवढ्या वेळात मिनिटकाटा $\theta$ कोन फिरतो तेवढ्याच वेळात तासकाटा $\frac{\theta}{12}$ एवढ्या कोनातून फिरतो. म्हणून आपण जर मिनिटकाटा दिलेल्या $m\angle AOB$ च्या चौपट कोनातून फिरविला तर तासकाटा आपोआप $\frac{1}{3}(m\angle AOB)$ एवढ्या कोनातून फिरेल. समजा $\angle AOB$ हा $75°$ चा कोन आहे. आपण जर मिनिटकाटा $4\times75°=300°$ मधून फिरविला तर तासकाटा बरोबर $\frac{4\times75°}{12}=25°$ मधून फिरेल. म्हणजे अशा वेळी तासकाटा फिरण्याचा कोन $\angle AOB$ च्या $\frac{1}{3}$ असेल.

* कोणत्याही काटकोन त्रिकोणामध्ये कर्णाविरुद्धच्या शिरोबिंदूतून कर्णावर काढलेल्या मध्यगेची लांबी कर्णाच्या लांबीच्या निम्मी असते [आ. 16 पहा].




आकृती 16

**पक्ष:** (1) $\triangle RPT$ हा काटकोन त्रिकोण आहे.
$m\angle RPT=90°$.
(2) D हा RT चा मध्यबिंदू आहे.

**साध्य:** $l(PD)=\frac{1}{2}l(RT)$

**रचना:** TZ हा PT ला लंब काढा. PD वाढविल्यावर हा लंब त्या रेषेला Z मध्ये छेदेल.

**सिद्धता:** PR आणि TZ या दोन्ही रेषा PT ला लंब असल्यामुळे, PR || TZ.
या समांतर रेषांच्या PZ व RT या छेदिका आहेत.
$\therefore m\angle RPD=m\angle DZT$ ..[ते आंतरव्युत्क्रम कोन आहेत]
व $m\angle PRD=m\angle DTZ$...[ ............,,.....,,.........,,...]
आता $\triangle RPD$ व $\triangle ZTD$ मध्ये
$l(RD)=l(DT)$......(पक्ष)
$m\angle RPD=m\angle DZT$
$m\angle PRD=m\angle DTZ$
$\therefore \triangle PRD\cong\triangle ZTD$........(कोकोबा)
$\therefore l(PR)=l(TZ)$ व $l(PD)=l(DZ)$
आता $\triangle RPT$ व $\triangle ZTP$ मध्ये,
$l(PR) = l(TZ)$.........(वर सिद्ध केल्याप्रमाणे)
PT सामाईक
$m\angle RPT=m\angle ZTP$ ....... (प्रत्येक कोन $90°$ चा)
$\therefore \triangle RPT\cong\triangle ZTP$.......(बाकोबा)
$\therefore l(RT)=l(PZ)$
$\therefore \frac{1}{2}l(RT)=\frac{1}{2}l(PZ)=l(PD)$
[किंवा $l(RD) = l(DT)= l(PD)$]

# 19. बीजगणितातील राजहंस

प्राचीन काळी इजिप्त, ग्रीस वगैरे देशांमध्ये नामवंत गणिती होऊन गेले, ही गोष्ट बऱ्याच जणांना माहीत असते. गणितातल्या अनेक क्रांतिकारी व नवनवीन कल्पनांचे जनक म्हणून आपण त्यांना ओळखतो. परंतु इतर देशांचे काय? इतर देश सोडा, पण आपल्या भारत देशाचे काय? याचे उत्तर आपल्याला निश्चितच अभिमानास्पद वाटेल. पूर्वीच्या काळच्या भारतीय तत्त्ववेत्त्यांनी गणितविषयाला लक्षणीय योगदान केले आहे. आर्यभट्ट, भास्कराचार्य यांच्यासारखे महान प्राचीन गणिती आणि रामानुजनसारखे अर्वाचीन गणिती यांच्या संशोधनकार्याने गणिताच्या विकासात स्वतःचे एक वैशिष्ट्यपूर्ण स्थान निर्माण केले आहे. नुकत्याच सोडलेल्या भारतीय उपग्रहांना 'आर्यभट्ट' व 'भास्कराचार्य' अशी नावे देऊन आपण या श्रेष्ठ प्रज्ञावंतांचा व त्यांच्या कार्याचा गौरव केला होता. या प्रकरणात आपण भास्कराचार्यांची थोडी

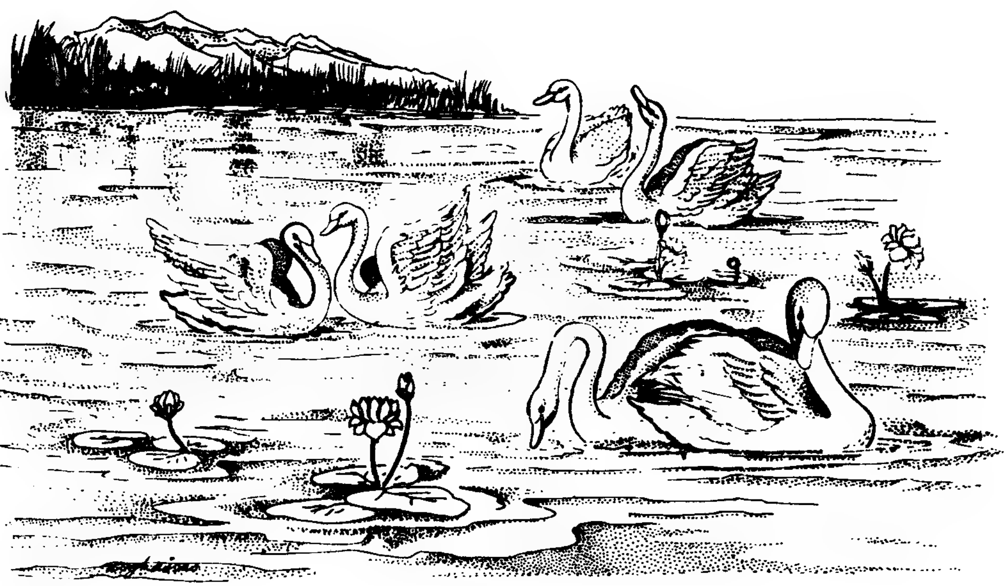
ओळख करून घेणार आहोत व त्यांच्या ग्रंथातील, वानगीदाखल, एक उदाहरण सोडविणार आहोत.

भास्कराचार्यांचा जन्म इ.स. 1144चा व मृत्यू 1223चा. 12 व्या शतकात होऊन गेलेल्या या श्रेष्ठ भारतीय गणितज्ञाला व ज्योतिर्विदाला (astronomer) 79 वर्षांचे दीर्घ आयुष्य लाभले. भास्कराचार्य बहुधा महाराष्ट्रातील जळगाव जिल्ह्यात चाळीसगावजवळ कुठेतरी रहात असावेत, या तर्काला पुष्टी देणारा पुरावा उपलब्ध आहे. त्यांचे वडील महेश्वर हे त्यांचे गुरु होते. लीलावती नावाची भास्कराचार्यांची मुलगी, लहानपणी वैधव्य आल्यामुळे, त्यांच्याजवळच रहात असे. वडिलांकडून गणिताचे उत्तम शिक्षण घेतल्यामुळे लीलावतीही गणितात चांगली पारंगत झाली होती.

त्या काळी सर्व ग्रंथरचना संस्कृत भाषेमध्ये करण्याचा प्रघात होता. त्यानुसार भास्कराचार्यांनीही आपले ग्रंथ संस्कृतमध्ये लिहिले आहेत. वयाच्या 36 व्या वर्षी त्यांनी सिद्धांत - शिरोमणि नावाचा ग्रंथ लिहिला. या ग्रंथामध्ये चार खंड आहेत : (1) लीलावती, (2) बीजगणित, (3) ग्रहगणित, व (4) गोल. आपली शिष्योत्तमा लीलावती हिचेच नाव त्यांनी पहिल्या खंडाला दिले. 'लीलावती' ही काव्यरचना आहे. अंकगणित, क्षेत्रफळ व घनफळ यांमधील काही विषय लीलावतीमध्ये काव्यरूपाने सांगितले आहेत. अबुल फैजीने इ. स. 1583 मध्ये लीलावतीचे पर्शियन भाषांतर केले. भास्कराचार्यांनी वयाच्या 69 व्या वर्षी, म्हणजे आयुष्यात चांगली परिपक्वता प्राप्त झाल्यावर, 'करण-कुतूहल' नावाचा दुसरा मुख्य ग्रंथ लिहिला.

पृथ्वी गोल आहे, तिला कशाचाही आधार नाही व ती स्वतः-भोवती गरगर प्रदक्षिणाही घालते, या गोष्टी भास्कराचार्यांना माहीत होत्या. आपण न्यूटनला गुरुत्वाकर्षण सिद्धांताचा जनक समजतो. परंतु त्याच्या आधी 500 वर्षे होऊन गेलेल्या भास्कराचार्यांच्या ग्रंथात, 'पृथ्वीजवळ आकर्षणाचे बल आहे व या बलाने ती आकाशातील प्रत्येक निर्जीव वस्तू आपणाकडे आकर्षित करून घेते', अशा तऱ्हेचे आश्चर्यजनक विधान सापडते. त्यांनी पृथ्वीभोवती असलेल्या वातावरणाच्या उंचीचा अंदाजही 96 मैल म्हणून नोंदवून ठेवला आहे. आजच्या ज्ञानाप्रमाणे वातावरणाचा 90 टक्के भाग 25 ते 30 मैल उंचीपर्यंत व्यापला आहे, ही गोष्ट जर लक्षात घेतली तर भास्कराचार्यांचा अंदाज खूपच योग्य होता, असे म्हणावे लागते.

लीलावतीमधील एक उदाहरण आपण आता सोडवू.



यावरून,त्या काळी गणिताचे संशोधन कोणत्या पद्धतीने चालत असे, याची थोडीशी कल्पना येऊ शकेल. अर्थात हे उदाहरणही संस्कृत भाषेत, काव्यरूपाने, मांडले आहे. आपण येथे त्याचे मराठी भाषांतर पाहू.

एका तळ्यात राजहंसांचा एक समुदाय विहार करीत होता. आकाशात जसे काळे ढग जमा होऊ लागले तसे त्या राजहंसांच्या संख्येच्या वर्गमुळाच्या दसपट हंस मानस सरोवराकडे उडून गेले, मूळ संख्येच्या $\frac{1}{8}$ पक्षी फुलांच्या ताटव्यांत नाहीसे झाले व उरलेल्या तीन जोड्या मात्र पाण्यावरून डौलात पुढे निघाल्या तर, हे माझ्या प्रिय कन्ये, किती राजहंसांनी सुरुवातीला तळ्याला शोभा आणली होती ?

निरनिराळी उत्तरे, अंदाजाने, मनाशी आणून हे गणित सोडविण्याचा कोणीही प्रयत्न करू शकेल. आपण मात्र येथे एक वर्गसमीकरण सोडवून उत्तर काढणार आहोत.

समजा, x राजहंस सुरुवातीला तळ्यात पोहत होते. अर्थात, यांतील $10\sqrt{x}$ हंस मानस सरोवराकडे व $\frac{x}{8}$ हंस ताटव्यांकडे उडून गेले व 6 हंस तळ्यात उरले. म्हणून,

$$x-10\sqrt{x}-\frac{x}{8}=6.$$

समजा, $y=\sqrt{x}$

$$\therefore y^2-10y-\frac{y^2}{8}=6$$

$$\therefore 8y^2-80y-y^2=48$$

$$\therefore 7y^2-80y-48=0$$

$$\therefore 7y^2-84y+4y-48=0$$

$$\therefore 7y(y-12)+4(y-12)=0$$

$$\therefore (y-12)(7y+4)=0$$

$\therefore$ $y=12$ किंवा $y=-\frac{4}{7}$

$\because x=y^2$, $\therefore x=144$ किंवा $\frac{16}{49}$

पक्ष्यांची संख्या पूर्णांक असल्यामुळे $x = 144$ हे उत्तर.

म्हणजेच, कृष्णमेघांची अशुभ छाया पडण्यापूर्वी 144 राजहंस त्या तळ्यात राजसक्रीडा करण्यात मग्न होते.

## 20. रस्ता तयार करण्याचा मार्ग

आपण सर्वजण वर्तमानपत्रे वाचतो. एखाद्या ठिकाणी नवीन रस्ता होत आहे किंवा नवा रेल्वेमार्ग होत आहे, अशा प्रकारच्या बातम्या आपल्याला अधूनमधून वाचावयास मिळतात. अशा एखाद्या मार्गाची योजना आखताना एक महत्त्वाची काळजी घेणे आवश्यक असते. त्या मार्गामुळे जास्तीत जास्त महत्त्वाची गावे जोडली जातील व त्याचबरोबर तो शक्य तेवढ्या कमीत कमी लांबीचा असेल, हे पहावे लागते. यामुळे, कमीत कमी खर्चात जास्तीत जास्त सुविधा उपलब्ध होऊ शकतात. अशा प्रकारच्या योजनांची आखणी करताना भूमितीचा उपयोग होऊ शकतो, याचे कदाचित बऱ्याच जणांना आश्चर्य वाटेल. शाळेत आपण जी भूमिती शिकतो ती वरवर जरी कितीही पुस्तकी वाटली तरी तिचेही व्यवहारात अनेक उपयोग होऊ शकतात. हा मुद्दा स्पष्ट करण्यासाठी आपण एक अतिशय व्यावहारिक उदाहरण घेऊन त्याची चर्चा या प्रकरणात करणार आहोत.

समजा, राम नावाचा एक सामाजिक कार्यकर्ता पातुर या गावी राहतो. या गावापासून काही मैलांवरच मोरणा नावाची एक नदी वाहते. आपण अशीही कल्पना करू की, मोरणा नदीच्या ज्या बाजूला पातुर आहे त्याच बाजूला, परंतु पातुरपासून थोडे लांब, शिवगाव नावाचे दुसरे एक खेडे वसलेले आहे. शिवगावला शंकराचे प्रसिद्ध देवालय आहे. दर वर्षी, एका विशिष्ट दिवशी, मोरणा नदीवरून जलकलश भरून घेऊन त्याचा अभिषेक शिवगावच्या शंकरावर करायचा, ही प्रथा पातुरच्या रहिवाशांमध्ये अनेक वर्षे चालत आलेली आहे. हा दिवस सर्व गावकरी फार पवित्र मानतात.

परंतु यात एक अडचण अशी आहे, की पातुर व शिवगावपासून मोरणेवर जायला चांगला रस्ता नाही. हजारो गावकऱ्यांची त्यामुळे दर वर्षी फार गैरसोय होते. रामला हा रस्ता



आकृती 1

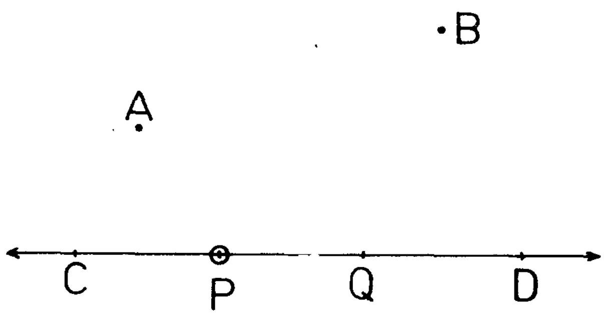
बांधायचा आहे. परंतु त्यासाठी त्याला प्रथम नदीवर योग्य जागा निवडायची आहे — अशी जागा की जेथे जाऊन पातुरचे गावकरी नदीचे पवित्र पाणी भरून घेऊ शकतील. या जागेपासून पातुरपर्यंत एक व शिवगावपर्यंत दुसरा असे दोन पक्के रस्ते बांधावे, असा रामचा विचार आहे. या ठिकाणी नदीवर जर घाट बांधला तर यात्रेकरूंची अधिकच सोय होणार आहे. परंतु त्याला ही जागा अशी हवी आहे, की पातुरपासून ही जागा व या जागेपासून शिवगाव हे सर्व अंतर शक्य तेवढे कमी भरेल. ही गोष्ट यात्रेकरूंच्या दृष्टीने जशी सोयीची ठरेल तशी रस्त्याच्या बांधकामाच्या दृष्टीनेही कमीत कमी खर्चाची होईल. अशा परिस्थितीत नदीवरील जागा कशी निवडायची, हा रामपुढील महत्त्वाचा प्रश्न आहे.

आता, यासाठी, नदीच्या काठावर निरनिराळी ठिकाणे घेऊन त्यांची पातुरपासून व शिवगावपासून अंतरे मोजत सुटायचे, हा काही मार्ग होऊ शकत नाही. योग्य जागेची निवड अशा प्रकारे करायची म्हणजे ते फार जिकीरीचे, खर्चाचे आणि चेंगट होऊन बसेल. आपल्या शालेय भूमितीच्या सहाय्याने आपण रामला मदत करू शकू का ? बघू या.

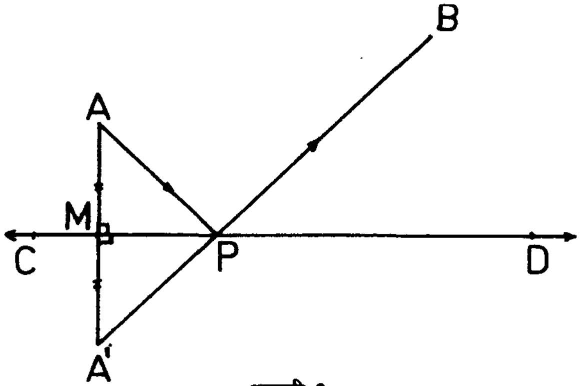
हा प्रश्न गणिताने सोडविण्यासाठी प्रथम आपण एका कागदावर A व B या दोन बिंदूंनी पातुर व शिवगाव ही गावे दाखवू. तसेच मोरणा नदीच्या काठासाठी CD ही सरळ रेषा काढू [आ. 2 पहा]. CD वर आपल्याला P हा एक असा बिंदू पाहिजे की, $l(AP)+l(PB)$ ही लांबी कमीत कमी भरेल. वेगळ्या शब्दांत म्हणजे, CD वर जर दुसरा कोणताही Q बिंदू घेतला तर, $l(AP)+l(PB) < l(AQ)+l(QB)$.

P बिंदू निश्चित करण्यासाठी पुढील कृती करता येईल :

A पासून CD वर AM हा लंब टाका. AM रेषा A′ पर्यंत अशी वाढवा की, $l(AM)=l(A'M)$. A′ हा बिंदू B ला जोडा. A′B ही रेषा CD ला P मध्ये छेदेल. P हे आपल्याला हवे




आकृती 2




आकृती 3

असलेले ठिकाण असेल. म्हणजे, P या ठिकाणी घाट बांधून ते ठिकाण पातुरला व शिवगावला सरळ रस्त्यांनी जोडावे, असा सल्ला आपण रामला देऊ [आ. 3 पहा].

यावर राम साहजिकच असे विचारील की, या कृतीमुळे मिळालेले P हे ठिकाण योग्य आहे कशावरून ? किंवा, APB हे अंतर सर्वात कमी भरेल कशावरून ? अर्थात आपल्याला ही गोष्ट सिद्ध केली पाहिजे. यासाठी आपण Q हा दुसरा कोणताही एक बिंदू CD वर घेऊ व असे सिद्ध करू की,

l(AP)+l(PB)<l(AQ)+l(QB).

**पक्ष:** l(AM)=l(A'M)

m∠AMP=m∠A'MP=90°

Q हा CD वर कोणताही एक बिंदूआहे [आ.4 पहा]

**साध्य:** l(AP)+l(PB)<l(AQ)+l(QB)

**कृती:** Q हा बिंदू A' ला जोडा व BN हा B पासून CD वर लंब काढा.

**सिद्धता:** △AMP व △A'MP मध्ये,

l(AM)=l(A'M) ............... [पक्ष]

m∠AMP=m∠A'MP ...... [पक्ष]

MP सामाईक

म्हणून △AMP≅△A'MP

∴ l(AP)=l(A'P)........(1)

तसेच,

△AQM≅△A'QM.......[∵ l(AM)=l(A'M), m∠AMQ=m∠A'MQ, MQ सामाईक]

∴ l(AQ)=l(A'Q)......(2)

आता, △A'QB मध्ये,

l(A'B)<l(A'Q)+l(QB)...[त्रिकोणाच्या दोन बाजूंची बेरीज तिसऱ्या बाजूपेक्षा जास्त असते] .....(3)

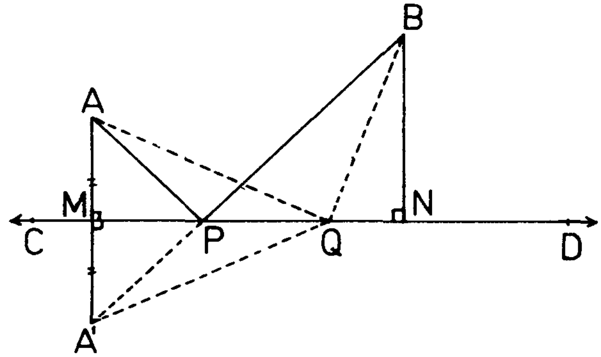
परंतु, l(A'B)=l(A'P)+l(PB)........(4)

(3) व (4) वरून,

l(A'P)+l(PB)<l(A'Q)+l(QB)

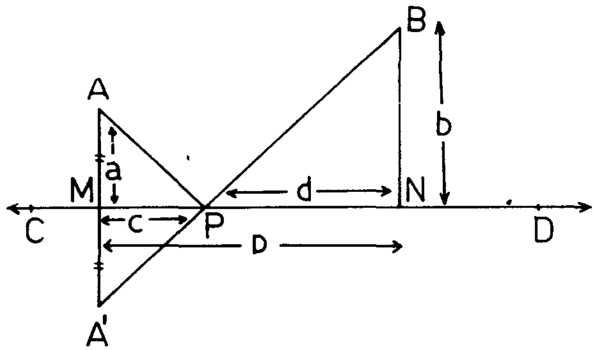
(1) व (2) वरून

l(AP)+l(PB)<l(AQ)+l(QB).




आकृती 4

अशा प्रकारे P ही जागा योग्य आहे, हे आपण सिद्ध केले; तरीही एक व्यावहारिक अडचण उरलीच. हे सगळे कागदावर ठीक आहे. पण प्रत्यक्षात A' हा बिंदू निश्चित कसा करायचा? कारण त्यासाठी रामला नदीतून पलीकडे जावे लागणार, A' हे ठिकाण निश्चित करून तेथून शिवगावपर्यंत एखादा लांब दोरखंड टाकावा लागणार, व हा दोरखंड काठाला कोठे छेदेल हे शोधावे लागणार ? नदीच्या दोन्ही बाजूंना दाट जंगल असल्यामुळे हे सगळे प्रत्यक्ष करणे जवळजवळ अशक्यप्रायच ठरणार. हा सर्व त्रास वाचवून राम P हा बिंदू निश्चित करू शकेल का ?




आकृती 5

आकृती 5 पहा. आपण $l(MN)=D$, $l(MP)=c$, $l(PN)=d$, $l(AM)=a$ व $l(BN)=b$ म्हणू.

आता, $\triangle A'MP$ व $\triangle BNP$ या त्रिकोणांत,

$m\angle MPA'=m\angle BPN$ .......[विरुद्ध कोन]

$m\angle A'MP=m\angle BNP\ (=90^\circ)$

म्हणून उरलेले कोन एकरूप असले पाहिजेत.

म्हणजे, $m\angle MA'P=m\angle PBN$.

∴ हे दोन त्रिकोण समरूप आहेत. अर्थात, त्यांच्या संगत बाजूंची गुणोत्तरे सारखी आहेत.

म्हणजे, $\frac{l(A'M)}{l(BN)}=\frac{l(MP)}{l(PN)}$

परंतु, $l(A'M)=l(AM)$.......[कृती]

$\therefore \frac{l(AM)}{l(BN)}=\frac{l(MP)}{l(PN)}$

किंवा $\frac{l(AM)}{l(BN)}=\frac{c}{d}$

$\therefore \frac{l(BN)}{l(AM)}=\frac{d}{c}=\frac{D-c}{c}=\frac{D}{c}-1$

$\therefore \frac{b}{a}=\frac{D}{c}-1$

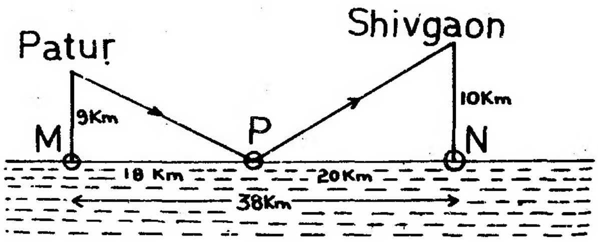
$\therefore \frac{b}{a}+1=\frac{D}{c}$

$\therefore \frac{b+a}{a}=\frac{D}{c}$

$\therefore c=\frac{aD}{(b+a)}$ .........(5)

या सूत्रावरून, a, D व b ही अंतरे मोजून आपल्याला c ची किंमत काढता येईल. म्हणजेच, घाट बांधायचे ठिकाण M पासून किती अंतरावर निवडायचे, हे आपल्याला समजेल. यासाठी नदी ओलांडण्याची काहीच जरुरी भासणार नाही. म्हणून आपण रामला पातुरपासून व शिवगावपासून नदीच्या काठापर्यंतची अंतरे [AM=a व BN=b] व तसेच MN=D ही अंतरे मोजायला सांगू.

समजा रामने ही सर्व अंतरे मोजली. a=9 कि.मी., b=10 कि.मी. व D=38 कि.मी., अशी ही सर्व अंतरे भरली. ही




आकृती 6

मोजमापे सूत्र [5] मध्ये घालून $l(MP)=\frac{9\times 38}{(10+9)}=18$ कि.मी., हे उत्तर आले [आ. 6 पहा]. म्हणून घाटाची जागा M पासून 18 किलोमीटरवर निवडणे योग्य ठरेल.

A पासून P पर्यंत व P पासून B पर्यंतच्या रस्त्याचे अंतर $[l(AP)+l(PB)]$ सर्वात कमी असेल, ही गोष्ट सिद्ध झाली. परंतु किती भरेल हे अंतर ?

$l(AP)=\sqrt{9^2+18^2}$ ......[पायथॅगोरसचे प्रमेय]

$=\sqrt{405}$

$\cong 20$ कि.मी. [सुमारे]

तसेच, $l(BP)=\sqrt{20^2+10^2}$

$=\sqrt{500}$

$\cong 22$ कि.मी. [सुमारे]

म्हणजे, एकूण अंतर $l(AP)+l(BP)=42$ कि.मी. [सुमारे]. याहून दुसरा कोणताही मार्ग निवडला तरी ते अंतर 42 कि.मी. पेक्षा जास्त येईल, हे तुम्ही पडताळून पाहू शकता.

उदा., जर A→M→B असा रस्ता बांधला तर,

$l(AM)=9$ कि.मी. व $l(MB)=\sqrt{38^2+10^2}$

$=\sqrt{1544}$

$\cong 39$ कि.मी. [सुमारे]

म्हणून $l(AM)+l(MB)\cong 9+39\cong 48$ कि.मी. [सुमारे]

तसेच, A→N→B असा रस्ता बांधला तर,

$l(AN)+l(NB)=\sqrt{9^2+38^2}+10$

$=\sqrt{81+1444}+10$

$=\sqrt{1525}+10$

$\cong 39+10$

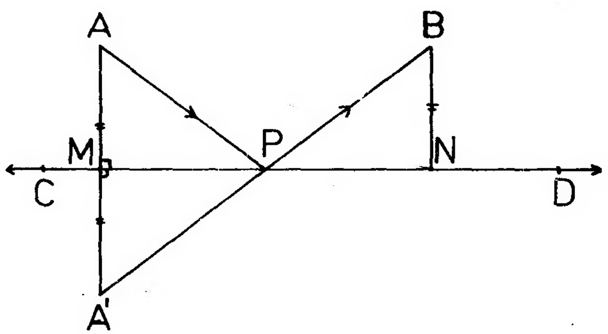
$\cong 49$ कि.मी. [सुमारे]

ही दोन्ही अंतरे 42 किलोमीटरपेक्षा जास्त येतात.

**विशिष्ट उदाहरण :** जर पातुर (A) व शिवगाव (B) ही दोन्ही गावे मोरणा नदीपासून सारख्याच अंतरावर असतील [आ. 7 पहा] तर $\triangle A'MP$ व $\triangle BNP$ हे केवळ समरूप झाले नसते तर एकरूपच ठरले असते. म्हणजे अशा परिस्थितीत;
$l(MP)=l(NP)$.

म्हणजे P हा बिंदू [घाट बांधण्याची जागा] MN चा मध्यबिंदू झाला असता.

[$c=\frac{aD}{b+a}$ या सूत्रानुसारही, जेव्हा $b=a$ तेव्हा
$c=\frac{aD}{2a}=\frac{D}{2}$ ]

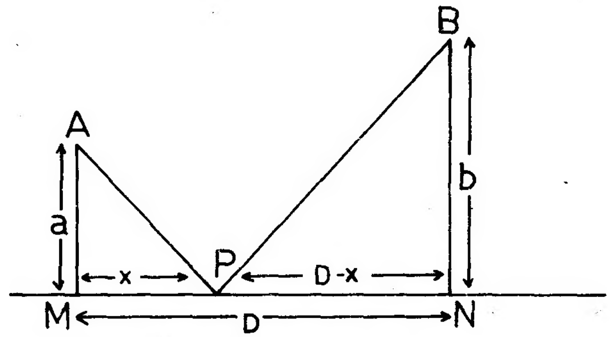



आकृती 7

आकृती 7 कडे पाहून आपल्याला दुसऱ्या एका आकृतीची आठवण होते. सपाट आरशावरून जेव्हा प्रकाशाचे परावर्तन होते तेव्हा आपण अशीच आकृती काढतो. त्या ठिकाणी AP हा आपाती किरण, CD हा सपाट आरसा व PB हा परावर्तित किरण म्हणून आपण समजतो. A बिंदूपासून निघालेला प्रकाशाचा किरण परावर्तित होऊन B बिंदूतून जातो, असा त्या आकृतीचा अर्थ असतो. प्रकाशकिरण पुढे जाताना नेहमी कमीतकमी लांबीचा मार्ग पसंत करतो, असे आपण म्हणू शकू का ?

ज्यांना Calculus माहीत आहे व जे एखाद्या function चे differentiation कसे करायचे हे जाणतात त्यांच्यासाठी पुढे एक पद्धत दिली आहे.

[आ. 8 पहा]. MN वर P हा कोणताही एक बिंदू घ्या. $l(MP)=x$ [समजा].




आकृती 8

ज्या वेळी P बिंदू MN वर सरकतो त्या वेळी $l(AP)$ व $l(PB)$ ही अंतरेही बदलतात. थोडक्यात, $l(AP)+l(PB)$ हे एकूण अंतर, MP चे किंवा x चे function होते. म्हणून, $l(AP)+l(PB)=f(x)$.

$f(x)$ ला किमान किंवा कमाल किंमती तेव्हा प्राप्त होतात जेव्हा x च्या विशिष्ट किंमतीला $f'(x)=0$. येथे $[f'(x)=\frac{df(x)}{dx}]$ याचा उपयोग करून x च्या कोणत्या किंमतीला $f(x)$ ची किमान किंमत येईल, हे आपण शोधून काढू.

$$f(x)=l(AP)+l(PB)$$

आता, $l(AP)=\sqrt{[l(AM)]^2+[l(MP)]^2}=\sqrt{a^2+x^2}$

तसेच, $l(PB)=\sqrt{[l(BN)]^2+[l(PN)]^2}=\sqrt{b^2+(D-x)^2}$

[येथे a, b व D ही अंतरे स्थिरांक असून फक्त x हे चल आहे.]

$$\therefore f(x)=\sqrt{a^2+x^2}+\sqrt{b^2+(D-x)^2}$$

$$\therefore f'(x)=\frac{df(x)}{dx}=\frac{1}{2}(a^2+x^2)^{-1/2}(2x)+\frac{1}{2}[b^2+(D-x)^2]^{-1/2}.2(D-x)(-1)$$

$$=\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}-\frac{D-x}{\sqrt{b^2+(D-x)^2}}$$

समजा, $x=c$ या किंमतीला $f(x)$ ची किंमत किमान आहे. म्हणजे,

(1) $f'(c)=0$ आणि (2) $f''(c)>0$

आता $\because f'(c)=0$,

$$\therefore \frac{c}{\sqrt{a^2+c^2}}-\frac{D-c}{\sqrt{b^2+(D-c)^2}}=0$$

$$\therefore \frac{c}{\sqrt{a^2+c^2}} = \frac{D-c}{\sqrt{b^2+(D-c)^2}}$$

दोन्ही बाजूंचा वर्ग करून

$$\frac{c^2}{a^2+c^2} = \frac{(D-c)^2}{b^2+(D-c)^2}$$

$$\therefore c^2b^2+c^2(D-c)^2=a^2(D-c)^2+c^2 (D-c)^2$$

$$\therefore c^2b^2=a^2(D-c)^2$$

$$\therefore \frac{b^2}{a^2} = \frac{(D-c)^2}{c^2}$$

$$\therefore \frac{b}{a}=\frac{D-c}{c} = \frac{D}{c} -1$$

$$\therefore \frac{b}{a}+1=\frac{D}{c}$$

$$\therefore \frac{b+a}{a} = \frac{D}{c}$$

$$\therefore c= \frac{aD}{b+a}$$

हे सूत्र म्हणजे आधीचे सूत्र (5) आहे.

आता $f'(c)=0$ याचा अर्थ $x=c$ असताना $f(x)$ ची किंमत किमान असू शकेल किंवा कमालही असू शकेल. म्हणून $x=c$ ला $f(x)$ ची किंमत किमान आहे हे दाखविण्यासाठी, $f''(c) =\left[\frac{d^2f}{dx^2}\right]_{x=c}$ ही किंमत धन संख्या येते, म्हणजेच शून्यापेक्षा जास्त येते, हे सिद्ध केले पाहिजे. हे सोपे आहे व ते तुमचे तुम्हालाच करून पाहता येईल.

सर्वसाधारण माणसाच्या आणि विद्यार्थ्यांच्याही मनात गणित विषयाबद्दल एक प्रकारची भीती असते. विज्ञान एक वेळ चालेल परंतु गणित नको, असे म्हणून तो या विषयापासून शक्यतो दूर राहण्याचा प्रयत्न करतो. जीवनात येणाऱ्या दैनंदिन प्रश्नांपासून अलिप्त असणारे पाठ्यपुस्तकी गणित बऱ्याच वेळा या नकोपणाला कारणीभूत असते. गणित शिकण्याच्या नीरस पध्दतीमुळे मुलाच्या उत्साहावर पाणी पडून कधी कधी त्याच्या शोधबुध्दीची धारच बोथट होत जाते. परंतु प्रत्यक्ष अनुभवाच्या आधारे जर, छोट्या छोट्या गोष्टींच्या रूपाने, वाचकाचे मनोरंजन करीत, गणितातील काही विषय मांडले तर कदाचित त्याच्या मनातील दुजाभाव कमी होऊ शकेल व त्याला एक प्रकारच्या सामर्थ्याचा, सौंदर्याचा व यशसंपादनाचा अनुभव येऊ शकेल, अशी कल्पना या पुस्तकाच्या मुळाशी आहे.

विषयाच्या अवघडपणानुसार यातील प्रकरणांचा सर्वसाधारण क्रम ठेवला आहे. विषय सुलभ होण्यासाठी भरपूर आकृत्या व चित्रेही समाविष्ट केली आहेत. गणितातील व्यावहारिक संदर्भ असलेले प्रश्न, कोडी, संख्यांचे मजेदार गुणविशेष इत्यादींविषयी लिहिताना काही प्राचीन गणितज्ञांचाही थोडासा परिचय करून देण्याचा प्रयत्न केला आहे.

वर्गातील अध्ययन-अध्यापन जास्त रसरशीत करण्यासाठी किंवा घरी अभ्यास करताना, वर्गात शिकविलेल्या संकल्पनांना व्यावहारिक अर्थ प्राप्त करून देण्यासाठी—खरे म्हणजे गणिताबद्दल आस्था व जवळीक निर्माण करण्यासाठी — ग्रा उपयोग होईल अशी आशा आहे.

SBN 19 561891 2

ऑक्सफर्ड युनिव्हर्सिटी प्रेस